

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
· MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
· TOLLMIEHN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

BAND 41

SEITE 141—184

HEFT 4

APRIL 1961

AUS DEM INHALT:

H A U P T A U F S Ä T Z E

H. A. Lang: Surface Displacements in an Elastic Half-Space / **G. S. S. Ludford:** Longitudinal Vortices in Shear Flow / **H. Bufler:** Der Spannungszustand in einer geschichteten Scheibe

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

EINGEGANGENE BÜCHER

N A C H R I C H T E N



AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

Seite

Hauptaufsätze

H. A. Lang: Surface Displacements in an Elastic Half-Space 141

G. S. S. Ludford: Longitudinal Vortices in Shear Flow . . . 153

H. Bufler: Der Spannungszustand in einer geschichteten Scheibe 158

Kleine Mitteilungen

B. D. Aggarwala: Heat-Treatment of a Sphere made of Visco-Elastic-Plastic Material with Temperature-Dependent Yield Stress 180

Buchbesprechungen 181

Eingegangene Bücher 184

Nachrichten 184

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, zeitweilig und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. a. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Satzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein. Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmiedler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

H. F. CHILMI

Qualitative Methoden beim n -Körperproblem der Himmelsmechanik

Vom Autor durchgesehene und ergänzte Übersetzung

Übersetzung aus dem Russischen

Herausgegeben von J. O. FLECKENSTEIN

(Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 10)

1961. 116 Seiten — 4 Abbildungen — 1 Tabelle —
gr. 8° — DM 23,—

Nachdem das n -Körperproblem der Himmelsmechanik zu Beginn dieses Jahrhunderts durch die Arbeiten von H. Poincaré, K. F. Sundman u. a. seinen definitiven mathematischen Abschluß erhalten zu haben schien, haben nun die Arbeiten der sowjetischen Schule — ausgehend von den kosmogonischen Fragestellungen O. J. Schmidts — diesem alten analytischen Problem eine völlig neue Wendung gegeben.

Galt bisher der Zusammenstoß als die einzig sinnvolle Singularität in einem n -Körperproblem, so haben die neueren Forschungen ergeben, daß die Anwendung der mengentheoretischen Maßtheorie auch das finale Verhalten eines dissipativen Systems von n Massenpunkten zu spezifizieren erlaubt.

Die Monographie von Prof. H. F. Chilmi (Moskau) gibt eine zusammenfassende Darstellung der diesbezüglichen mathematischen Arbeiten in der Sowjetunion, an denen er selber führend beteiligt gewesen ist.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Ich/wir bestelle/n aus dem Deutschen
- Verlag der Wissenschaften. Berlin

— Expl. Worobjow,

Die Momentenmethode
in der angewandten

Mathematik

Etwas DM 16,—

Name

Anschrift

DRUCKSACHE

An

J. W. WOROBJOW

Die Momentenmethode in der angewandten Mathematik

Mathematik für Naturwissenschaft und Technik, Band 4

Übersetzung aus dem Russischen

Etwa 180 Seiten, 16 Abbildungen, gr. 8°, Kunstleder, etwa DM 16.—

In diesem Buch wird aus der Vielzahl verschiedener Iterationsverfahren, die in den letzten Jahren nach dem Aufkommen der automatischen Rechenmaschinen entwickelt werden, eine Klasse von Methoden herausgegriffen, die auf einem Variationsprinzip beruhen und eng mit dem klassischen Momentenproblem von Tschebyscheff und Markoff zusammenhängen. Diese Methoden zeichnen sich durch umfassende Anwendbarkeit (z. B. in Mechanik, Thermodynamik und Elektronenoptik sowie zur angehäuerten Berechnung von Eigenwerten linearer Operatoren und zur Lösung linearer Gleichungen) und ferner durch die schnelle Konvergenz der sukzessiven Näherungen aus. Durch die Allgemeinheit der Problemstellung und die Benutzung funktionalanalytischer Hilfsmittel war es möglich, alle Methoden der betrachteten Klasse in Form der Momentenmethode zu vereinigen.

Surface Displacements in an Elastic Half-Space^{*)}

By H. A. LANG

Die vorliegende Arbeit ist ein Bericht über die Resultate einer Untersuchung von elastischen „Grundwellen“, die auftreten, wenn eine konzentrierte Last (mit einer Heavisideschen Zeitabhängigkeit) einen Druck auf die Oberfläche eines elastischen Halbraumes ausübt.

Die Resultate bestehen aus

1. Integralausdrücken für die einzeln genommenen Beiträge der P , S , M und der Rayleighschen Grundwellensysteme zu den Verschiebungen und den zugehörigen Potentialen;

2. bestimmten Ausdrücken und Kurven für die Verschiebungen, die jede Wellenart erzeugt. Für den Spezialfall $\nu = 1/4$ reduzieren sich die gesamten Flächenverschiebungen auf die bekannten Formeln, die von Pekeris erhalten wurden.

This is a report of results obtained in an investigation of elastic ground waves initiated by a point load (having a Heaviside time variation) acting on the surface of an elastic halfspace. The results consist of

1. Integral expressions for displacements and associated potentials everywhere in the half-space for the separate contributions from the P , S , M and Raleigh surface wave systems.

2. Explicit expressions and curves for the surface displacements for each type of wave. The total surface displacements (evaluated for $\nu = 1/4$) reduce to known expressions obtained by Pekeris.

Настоящая работа является докладом о результатах, полученных при исследовании эластических „основных волн“, возникающих, когда сосредоточенная нагрузка (с Хевисидовой зависимостью от времени) оказывает давление на поверхность некоторого, в нашем случае эластичного, полупространства.

Полученные результаты состоят из:

1. интегральных выражений для взятых в отдельности долей, вносимых величинами P , S , M и системами основных волн Рейлея в смещения и соответствующие потенциалы;

2. определённых выражений и кривых для смещений создаваемых каждым видом волн. Для частного случая $\nu = 1/4$ все смещения поверхностей сводятся к известным формулам, полученных Пекерисом.

Nomenclature

The following nomenclature is used in the paper:

t	= time	α, β	= incident and reflection angles of P , S waves
r, z, φ	= cylindrical coordinates		
R, θ, φ	= spherical coordinates	$\sin \gamma$	$= \frac{C_T}{C_L} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$
u, w	= displacements (cylindrical)	$N(\alpha, \beta)$	$= \tan \alpha \cos^2 2\beta + \tan \beta \sin^2 2\beta$
U, W	= displacements (spherical)	ϱ	= density
λ, μ	= LAME's constants	$\frac{C_L t}{R}$	
ν	= Poisson's ratio	a	$= \frac{C_L t}{R}$
Δ, \bar{w}	= dilatation, rotation	b	$= \frac{C_T t}{R}$
Φ, Ψ	= scalar, vector potentials	v	$= \sin \beta$
$C_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}$	= dilatational (P) wave speed	$M(v)$	$= 1 - 8v^2 + 8(3 - 2\sin^2 \gamma)v^4 - (16\cos^2 \gamma)v^6$
$C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$	= rotational (S) wave speed	$\pm g_i (i = 1 \text{ to } 3)$	= roots of $M(v)$
C_R	= surface wave speed	G_1	$= [a - \cos(\alpha - \theta)][a - \cos(\alpha + \theta)]$
σ, τ	= normal, shear stresses	G_2	$= [b - \cos(\beta - \theta)][b - \cos(\beta + \theta)]$
ω	= frequency	H_1	$= \cos 2\beta \sin^2 \beta / N(\alpha, \beta)$
k	= separation constant	H_2	$= \sin 2\beta \sin \beta / N(\alpha, \beta)$

Introduction

Wave propagation in an extended homogeneous, isotropic elastic medium has been discussed by LAMB [1], STOKES [2], LOVE [3] and many other investigators. It is well known that, when the medium is of bounded extent, the treatment of reflections at one or more free surfaces,

^{*)} Paper No. P-1498, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

or the satisfaction of boundary conditions resulting from the application of external load considerably increases the difficulty of obtaining appropriate solutions of the equations of motion. Among the general class of three-dimensional wave-propagation problems in a bounded medium, that of the propagation of axially symmetric wave fields is of considerable importance.

An examination of both two-dimensional and axisymmetric wave-propagation problems in the technical literature indicates a number of observations which underlie the choice of method of the present paper:

1. Transform methods frequently lead to integral expressions for displacements and stresses which are difficult to evaluate explicitly—particularly near the center of disturbance where the methods of stationary phase or steepest descent have been required to furnish useful results. The discussions in the recent work of GARVIN [9], JEFFREYS [6], LAPWOOD [7], HUTH and COLE [11], [12], and MENCHER [10] amply illustrate this observation.

2. Some of the particular methods applied to two-dimensional problems are capable, in principle, of extension to axisymmetric-wave fields. Yet the relatively few specific examples of axisymmetric-wave problems in the literature reflect the fact that the extension, in practice, is difficult to carry out.

These observations led to the conjecture that the method used by SAUTER possessed certain distinctive advantages which, if extended from two-dimensional wave fields to axisymmetric-wave fields, would eliminate the aforementioned difficulties. The method, which is described briefly below, is related to methods used by SUMMERFELD and KOTTLER [4] in studying electromagnetic wave-diffraction problems.

The surface displacements of the problem considered in this paper have been determined in closed form by PEKERIS [21]. PEKERIS [24], [25]¹⁾ has also explicitly determined the surface displacements for the closely related problem of the buried seismic pulse. Other investigators of the buried pulse problem are CAGNIARD [8], PINNEY [22] and DIX [23]. The solution for the surface pulse is obtained by letting the depth of the source approach zero.

The Method of Sauter

SAUTER's method consists of forming an aggregate of solutions of the wave equation — doubly infinite in frequency and separation constant. Transform methods are used to satisfy the boundary load conditions. The resulting expressions for the displacements can be integrated over the real domain of frequencies by choosing a suitable path in the complex plane of the separate constant. The real part of the separation constant satisfies the condition of reflection (SNELL's law) while the imaginary part adjusts the phases of the individual wave in the manner required by the boundary conditions. This effects a separation of the displacements (now single integrals) into separate expressions which, because of singularities in the integrand, can be identified with domains in the medium having different characteristics. The contribution of each domain and the

wave behavior at critical points near the surface and on the wave front can be studied.

This method was applied by SAUTER to solve the two-dimensional problem of a fluid halfspace initially at rest subjected to an arbitrary surface disturbance $q(x, t)$ [14]. The extension to an elastic half-space under the two-dimensional surface loading $\sigma_z = \sigma(x, t)$, $\tau_{xz} = \tau(x, t)$ constitutes SAUTER's second problem [15]. Search of the literature failed to disclose the extension to axisymmetric fields which SAUTER planned. The present paper is based on the same heuristic physical arguments advanced by SAUTER.

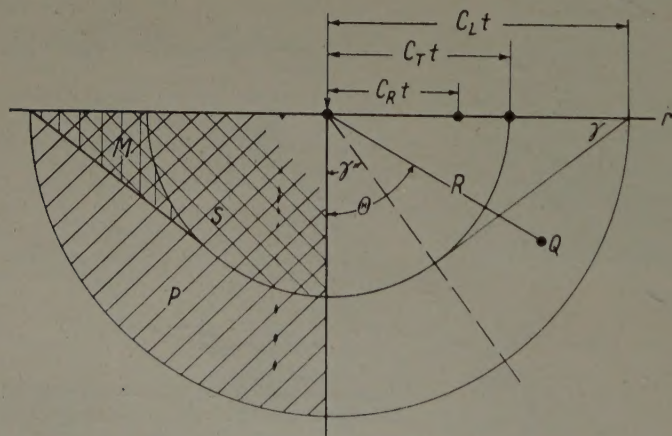


Fig. 1. Elastic Half-Space Showing Wave Regions (Left Half of Figure) and Nomenclature (Right Half of Figure)

Statement of the Problem

At time $t = 0$, a vertical downward unit force is applied at the origin of cylindrical coordinates r, z in the elastic half-space shown in Fig. 1. The time variation of the force is taken to be the

¹⁾ Reference [25] contains a rather complete discussion of the effect of S , P and SP (diffracted) waves on the surface displacements.

Heaviside unit function. The waves that are propagated from this epicenter consist of a P or dilatational wave traveling with a speed C_L and an S or rotational wave traveling with a slower speed C_T . Such waves have hemispherical fronts at any time t . In addition, a MACH wave having the straight line shock front and tangent to the S wave envelope exists. The surface (RAYLEIGH) wave traveling at speed C_R (as indicated in Fig. 1) will be discussed later.

It will be shown that the separation of wave displacements leads to separate wave systems denoted by I, II, III. The displacements (I) exist in the P , M , S regions behind the P front of Fig. 1. The displacements (II) exist in the S region behind the hemispherical front of Fig. 1. The displacements (III) exist only in the M region. The time of arrival of a wave of specified type at any point Q is characterized by the (dimensionless) arrival times

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & a = C_L t/R & a \geq 1.0 \\ \text{(II)} \quad & b = C_T t/R & b \geq 1.0 \\ \text{(III)} \quad & b = C_T t/R & 1 \geq b \geq \cos(\theta - \gamma) \end{aligned}$$

Mathematical Analysis

The displacement vector for a point in an elastic medium can be written as

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{curl } \Psi$$

where the scalar potential Φ satisfies the equation

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \dots \quad (1),$$

and the vector potential Ψ satisfies the equation

$$\nabla_1^2(r\Psi) = \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial t^2} \quad \dots \quad (2).$$

The scalar potential Φ determines the dilatational or P wave of speed C_L while the vector potential, which has only one component, determines the rotational (S) wave of speed C_T .

Formal solutions, harmonic in time, are

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2} z - \omega t\right)} J_0(kr), \\ \Psi &= \Psi_0 e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2} z - \omega t\right)} J_1(kr), \end{aligned}$$

which represent standing cylindrical waves of frequency ω and separation constant k .

The solution is generalized by writing:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(k, \omega) e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2} z - \omega t\right)} J_0(kr) dk d\omega, \\ \Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(k, \omega) e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2} z - \omega t\right)} J_1(kr) dk d\omega \end{aligned} \right\} \dots \quad (3).$$

The stresses at the surface ($z = 0$) are

$$\begin{aligned} \tau(r, t) &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(k, \omega) J_1(kr) e^{-i\omega t} dk d\omega, \\ \sigma(r, t) &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(k, \omega) J_0(kr) e^{-i\omega t} dk d\omega, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} G(k, \omega) &= -2ki \sqrt{\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2} f(k, \omega) + \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2\right) g(k, \omega), \\ F(k, \omega) &= \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{C_T^2}\right) f(k, \omega) + 2ki \sqrt{\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2} g(k, \omega). \end{aligned}$$

For brevity let $N(k, \omega)$ denote

$$4 k^2 \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - 2 k^2 \right)^2,$$

then

$$f(k, \omega) = \frac{-F(k, \omega) \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - 2 k^2 \right)}{N(k, \omega)}, \quad g(k, \omega) = \frac{-F(k, \omega) 2 k i \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2}}{N(k, \omega)},$$

and the displacements become

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{k F(k, \omega)}{N(k, \omega)} J_1(k r) e^{-i \omega t} dk d\omega \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - 2 k^2 \right) e^{i z \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2}} - 2 \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \right)^{1/2} e^{i z \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \right)^{1/2}} \right], \\ w &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{-i F(k, \omega)}{N(k, \omega)} J_0(k r) e^{-i \omega t} dk d\omega \\ &\quad \times \left[\left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2} \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - 2 k^2 \right) e^{i z \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2}} + 2 k^2 \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right)^{1/2} e^{i z \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \right)^{1/2}} \right] \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Using both a complex FOURIER transform and a HANKEL transform²⁾,

$$F(k, \omega) = \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2 \pi \mu} \sigma(r', t') e^{i \omega t'} dt' \right] J_0(k r') r' dr',$$

where $\sigma(r', t')$ is the normal load on the surface.

For the Heaviside unit loading

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma(r', t') J_0(k r') e^{i \omega t'} dr' dt' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{r'}{\pi \varepsilon^2} J_0(k r') dr' \int_0^{\infty} e^{i \omega t'} dt' = \frac{-i}{2 \pi \omega},$$

since the convergence of the improper time integral can be justified³⁾. Now $F(k, \omega) = \frac{-i k}{4 \pi^2 \mu \omega}$ and Eqs. (4) reduce to

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{-J_1(k r) i k^2 e^{-i \omega t} dk d\omega}{4 \pi^2 \mu \omega N(k, \omega)} [], \\ w &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{-J_0(k r) k e^{-i \omega t}}{4 \pi^2 \mu \omega N(k, \omega)} dk d\omega [] \end{aligned} \right\} \dots (5),$$

[] denoting the bracketed terms of Eqs. (4).

This aggregate of cylindrical waves is equivalent to a family of plane waves propagated in all directions, each with an amplitude dependent on the direction⁴⁾.

The integrals of Eqs. (5) are complex. To obtain real displacements, we take the frequency ω real and the separation constant k complex. Since a function and its conjugate have the same real parts, the frequency limits are modified by taking twice the real parts of the displacements between the limits, 0, ∞ .

²⁾ Reference [17] pages 8 and 12.

³⁾ Ref. [17], p. 9 or Ref. [18], p. 317.

⁴⁾ See Ref. [18], p. 361.

To complete the frequency integration, an appropriate path of integration in the complex k plane is replaced by equivalent paths C_1 in complex α and β planes defined by

$$k = \frac{\omega}{C_L} \sin \alpha = \frac{\omega}{C_T} \sin \beta,$$

implying the law of refraction,

$$\sin \gamma \sin \alpha = \sin \beta, \quad \text{where} \quad \sin \gamma = C_T/C_L \dots (6).$$

To obtain waves that decay with depth the paths C_1 are selected so that the imaginary parts of $\cos \alpha$, $\cos \beta$ are positives as required by the exponential members of Eqs. (4)⁵. If Eq. (6) were limited to real values of α , β , the symmetry of the problem suggests that $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0 \leq \beta \leq 90^\circ$. The extension to complex angles requires $0 \leq \text{Re}(\alpha) \leq 90^\circ$ and $0 \leq \text{Re}(\beta) \leq 90^\circ$. These requirements are satisfied by the paths C_1 shown in Fig. 2.

Eliminating the separation constant k reduces $N(k, \omega)$ to $(\omega/C_T)^4 N(\alpha, \beta) \cot \alpha$, where⁶

$$N(\alpha, \beta) = [\tan \alpha \cos^2 2\beta + \tan \beta \sin^2 2\beta].$$

The displacements become⁷

$$\left. \begin{aligned} 2\pi^2 \mu C_T u &= -\text{Re} \int_{C_1} \int_0^\infty i J_1 \left(\frac{R\omega}{C_L} \sin \alpha \sin \theta \right) \sin \beta H_1(\alpha) e^{i\omega \left(\frac{R}{C_L} \cos \alpha \cos \theta - t \right)} d\omega d\alpha \\ &\quad + \text{Re} \int_{C_1} \int_0^\infty i J_1 \left(\frac{R\omega}{C_T} \sin \beta \sin \theta \right) \cos \beta \sin \beta H_2(\beta) e^{i\omega \left(\frac{R}{C_T} \cos \beta \cos \theta - t \right)} d\omega d\beta, \\ 2\pi^4 \mu C_T w &= -\text{Re} \int_{C_1} \int_0^\infty \cot \alpha J_0 \left(\frac{R\omega}{C_T} \sin \alpha \sin \theta \right) \sin \beta H_1(\alpha) e^{i\omega \left(\frac{R}{C_L} \cos \alpha \cos \theta - t \right)} d\omega d\alpha \\ &\quad - \text{Re} \int_{C_1} \int_0^\infty J_0 \left(\frac{R\omega}{C_T} \sin \beta \sin \theta \right) \sin^2 \beta H_2(\beta) e^{i\omega \left(\frac{R}{C_T} \cos \beta \cos \theta - t \right)} d\omega d\beta \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

The interpretation of Eqs. (7) is as follows: The α members are referred to the path C_1 in the α plane. Furthermore, using Eq. (6), the integrand of the α members is a function of α only. This is emphasized by writing $H_1(\alpha)$ despite the explicit appearance of β in the definition of H_1 . Furthermore we shall later use alternative paths rather than C_1 in the α plane. Again Eq. (6) may be used to transform these alternative paths into equivalent paths in a β plane quite independently of the β members of Eqs. (7). Similarly, the integrand of the β members of Eqs. (7) is, in view of Eq. (6), a function of β only and is here referred to a path C_1 in the complex β plane.

The singularities⁸ of the integrands are such that the path C_1 may be deformed into the path C_2 in either α or β plane. The path C_2 approaches the angle $\alpha = \theta$ in the α plane or $\beta = \theta$ in the β plane where θ is restricted to the open interval $0 < \theta < 90^\circ$. Displacements on the axis and on the surface ($\theta = 0, 90^\circ$, respectively) are discussed later.

Along paths such as C_1 or C_2 in either the α or β plane, the frequency integral convergences⁹ since

$$\int_0^\infty e^{-r\omega} J_n(s\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2}} \left[\frac{(r^2 + s^2)^{1/2} - r}{s} \right]^n \quad (n = 0, 1).$$

⁵) All square roots in the paper are positive (except where noted).

⁶) The same expression arises in SAUTER's two-dimensional problem.

⁷) It is convenient to use spherical rather than cylindrical coordinates for the point Q of Fig. 1.

⁸) See later sections.

⁹) Ref. [19], p. 64.

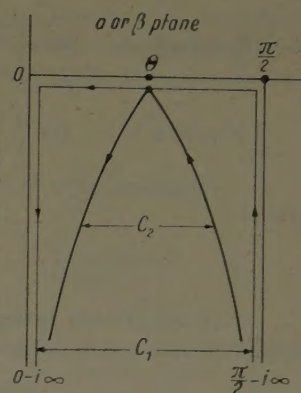


Fig. 2. Paths of Integration in the Complex α, β Planes

The convergence requirement $\text{Re}(r + is) \geq 0$ reduces to $\text{Im} \cos(\alpha + \theta) \geq 0$ in the α plane and $\text{Im} \cos(\beta + \theta) \geq 0$ in the β plane. Both conditions are satisfied by paths C_1 and C_2 . The displacements reduce to

$$\left. \begin{aligned} 2\pi^2 R u \sin \theta &= -\text{Im} \int_{C_2} \frac{a - \cos \alpha \cos \beta}{G_1^{1/2}} H_1(\alpha) d\alpha - \text{Im} \int_{C_4} \frac{(\cos \beta \cos \theta - b) H_2(\beta) \cos \beta d\beta}{G_2^{1/2}}, \\ 2\pi^2 \mu R w &= -\text{Im} \int_{C_2} \frac{\cos \alpha}{G_1^{1/2}} H_1(\alpha) d\alpha - \text{Im} \int_{C_4} \frac{\sin^2 \beta H_2(\beta) d\beta}{G_2^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (8),$$

where

$$\begin{aligned} G_1 &= [a - \cos(\alpha - \theta)] [a - \cos(\alpha + \theta)], \\ G_2 &= [b - \cos(\beta - \theta)] [b - \cos(\beta + \theta)]. \end{aligned}$$

The additional integrals which result from the frequency integration of the horizontal displacements u are discarded because they are real. They have the form

$$\text{Im} \int_{C_2} H_1(\alpha) d\alpha \quad \text{and} \quad \text{Im} \int_{C_4} H_2(\beta) \cos \beta d\beta.$$

To see that these are real, it is sufficient to evaluate them across a path C_3 at infinity formed by closing the contour in the α and β planes of Fig. 2. We may show that the integrals (from $0 - i\infty$ to $(\pi/2) - i\infty$) $\text{Im} \int_{C_3} H_1(\alpha) d\alpha$ and $\text{Im} \int_{C_3} H_2(\beta) \cos \beta d\beta$ vanish. Since there are no singularities within the α or β planes, by CAUCHY'S integral theorem the same integrals vanish on C_2 .

The steps leading to Eqs. (8) depend upon the fact that the branch points $k = \pm \omega/C_L$ and $k = \pm \omega/C_T$ of Eq. (4) are transferred to $\alpha = \pm \pi/2$, $\alpha = \sin^{-1}(1/\sin \gamma)$ in the α plane, respectively, and to $\beta = \pm \gamma$, $\beta = \pm \pi/2$ in the β plane, respectively, (Fig. 2). The branch cuts may be drawn from the branch points to $\pm \infty$ in such a manner that they lie outside of the regions of interest in the α , β planes of Fig. 2. For this reason they are excluded from Fig. 2 and subsequent figures. The singularities (simple poles) corresponding to the zeros of $N(\alpha, \beta)$ are discussed later.

Separation of Displacements

The separation of displacements depends on the branch points of G_1 , G_2 which result from the frequency integration. When $a < 1.0$, the quadratic factor in the α members of Eqs. (8), produces the branch points P_1 and P_2 (the branch cut is the heavy line shown in Fig. 3) correspon-

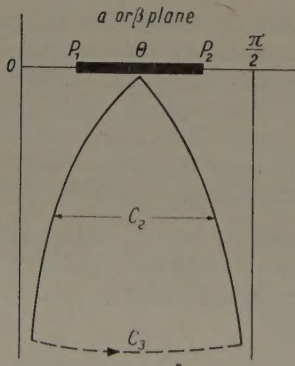


Fig. 3. The Closed Contour $C_2 - C_3$ ($a \leq 1.0$ in the α plane) ($b \leq 1.0$, $\theta < \gamma$ in the β Plane)

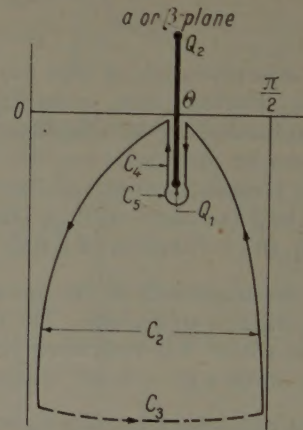


Fig. 4. The Closed Contour C_2, C_3, C_4, C_5 (for $a \geq 1.0$ in the α plane) (for $b \geq 1.0$, $\theta < \gamma$ in the β plane)

ding to $\alpha = \theta \pm \cos^{-1} a$. For $0 < \theta < 90^\circ$, applying CAUCHY'S integral theorem to the closed contour of Fig. 3, and discarding the real contribution from the path C_3 at infinity leads to the result that the α members of Eqs. (8) vanish when $a < 1.0$. This result corresponds to satisfying the radiation condition since outgoing waves can have no influence prior to reaching a point distance Q (Fig. 1) from the epicenter.

When $a > 1.0$, the branch points are Q_1 , Q_2 (the branch cut is the heavy line) shown in Fig. 4) corresponding to $a = \theta \pm i \cosh^{-1} a$. The contribution around Q_2 vanishes and the result is that the contour C_2 may be replaced by twice the integral along one of the two straight legs of the contour C_4 .

When $b < 1.0$, the branch points are P_1 and P_2 (Fig. 3) and the β members vanish by the argument used above. When $b \geq 1.0$ and $\theta > \gamma$, the branch points are Q_1, Q_2 corresponding to $\beta = \theta \pm \cosh^{-1} b$ and the β members of Eqs. (8) again reduce to the contour C_4 .

Corresponding to the phenomena of total reflection, the above arguments must be modified when $\theta > \gamma$ since diffracted P waves now arise from incident S waves. Physical reasoning suggests that along a path in the complex β plane such as the horizontal path C_1 of Fig. 2, where β is (very nearly) real, the exclusion of portions of the path corresponding to $\gamma < \text{Re}(\beta) < \theta$ would, in virtue of Eq. (6), exclude imaginary contributions arising from the complex angle α . This suggests that the contour C_1 must be modified to C_2 as shown in Fig. 5. Then adopting the same arguments as before, it is inferred that the appropriate limits are γ to $\theta - \cos^{-1} b$ for the M region and γ to $\theta - i \cosh^{-1} b$ for the S region when $b \geq 1.0$ and $\theta > \gamma$. An alternative argument is as follows: The branch cut can be extended from the branch point $\beta = \gamma$ to Q when $b > 1.0$ and $\theta > \gamma$. The final contour C_4 is the straight line lying along this branch (shown dotted in Fig. 5). The limits and path for the M region is established by reducing b from values > 1.0 to values < 1.0 . In this limiting procedure Q_1 ascends vertically, coincides with θ when $b = 1.0$ and is relabeled P_1 when $b < 1.0$. This equivalent choice of path C_4 does not effect the results (Eqs. (9)) which follow.

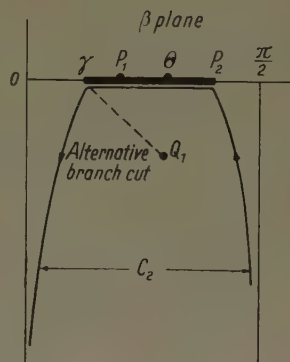


Fig. 5. Contour C_2 for $\theta > \gamma$

The displacements of Eqs. (8) may now be separated into the sets

$$\left. \begin{aligned} u(\text{I}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\theta}^{\theta - i \cosh^{-1} a} \frac{a - \cos \alpha \cos \theta}{\sin \theta} \frac{H_1(\alpha)}{G_1^{1/2}} d\alpha, \\ w(\text{I}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\theta}^{\theta - i \cosh^{-1} a} \cos \alpha \frac{H_1(\alpha)}{G_1^{1/2}} d\alpha, \\ u(\text{II}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\min(\theta, \gamma)}^{\theta - i \cosh^{-1} b} \cos \beta \frac{\cos \beta \cos \theta - b}{\sin \theta} \frac{H_2(\beta)}{G_2^{1/2}} d\beta, \\ w(\text{II}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\min(\theta, \gamma)}^{\theta - i \cosh^{-1} b} \sin^2 \beta \frac{H_2(\beta)}{G_2^{1/2}} d\beta, \\ u(\text{III}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\gamma}^{\theta - \cos^{-1} b} \cos \beta \frac{\cos \beta \cos \theta - b}{\sin \theta} \frac{H_2(\beta)}{G_2^{1/2}} d\beta, \\ w(\text{III}) &= -\frac{1}{\pi^2 R \mu} \text{Im} \int_{\gamma}^{\theta - \cos^{-1} b} \sin^2 \beta \frac{H_2(\beta)}{G_2^{1/2}} d\beta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &\geq 1.0, \\ b &\geq 1.0, \\ 1 &\geq b \geq \cos(\theta - \gamma), \end{aligned} \quad (9).$$

The wave system I refers to the region behind the P -wave front of Fig. 1. The wave systems II, III apply to the S, M regions, respectively, in Fig. 1. For clarity, the paths of integration to be associated with Eqs. (9) are redrawn in Figs. 6 and 7.

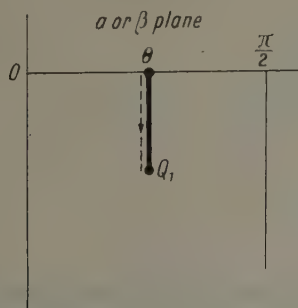


Fig. 6. Path for Waves (I) in α Plane; Path for Waves (II) in β Plane, $\theta < \gamma$

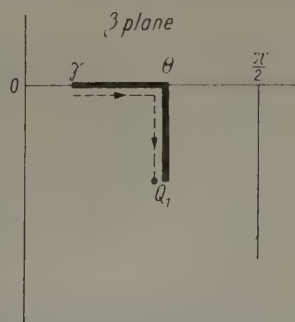


Fig. 7. Path for Waves (II) in β Plane, $\theta > \gamma, b \geq 1.0$, Path for Waves (III) in β Plane, $1 \geq b \geq \cos(\theta - \gamma)$

Preliminary Discussion of Eqs. (9)

The wave system (I) represents the (dilatational) P -wave. The rotation, \bar{w} is proportional to $\frac{\partial}{\partial a} (R U) + a \frac{\partial}{\partial \theta} (R W)$ which vanishes. The scalar potential Φ may be constructed from the equations

$$U_I = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad W_I = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

and is:

$$\Phi = \frac{1}{\pi^2 \mu} \operatorname{Im} \int_{\theta}^{\theta - i \cosh^{-1} a} H_1(\alpha) \log \left(\frac{\sqrt{G_1} + \alpha - \cos \alpha \cos \theta}{\sin \alpha \sin \theta} \right) d\alpha.$$

This satisfies the wave equation, a result easily confirmed by rewriting Eq. (1) in the form

$$(a^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Similarly the displacements II and III satisfy the requirement of vanishing dilatation

$$(R U) - b \frac{\partial}{\partial b} (R U) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (W R \sin \theta) = 0.$$

The vector potential Ψ , obtained from the equations

$$U_{II,III} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi \sin \theta) \quad W_{II,III} = - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} (R \Psi \sin \theta)$$

is

$$\Psi_{II} = \frac{1}{\pi^2 \mu} \operatorname{Im} \int_{\operatorname{Min}(\theta, \gamma)}^{\theta - i \cosh^{-1} b} \frac{H_2(\beta)}{\sin \theta} \sqrt{G_2} d\beta, \quad b \geq 1.0,$$

$$\Psi_{III} = \frac{1}{\pi^2 \mu} \operatorname{Im} \int_{\gamma}^{\theta - \cos^{-1} b} \frac{H_2(\beta)}{\sin \theta} \sqrt{G_2} d\beta, \quad 1 \geq b \geq \cos(\theta - \gamma).$$

These satisfy the wave equation (2) rewritten in the more convenient form

$$(b^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial b^2} (\Psi \sin \theta) - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi \sin \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Psi \sin \theta) = 0.$$

The displacements and potentials vanish on the wave front. The boundary conditions on the surface

$$\sigma_z(I + II) = 0, \quad e_{rz}(I + II) = 0 \quad \text{for} \quad b \geq 1.0,$$

and

$$\sigma_z(I + III) = 0, \quad e_{rz}(I + III) = 0 \quad \text{for} \quad 1 \geq b \geq \sin \gamma$$

are also satisfied.

The displacements (I) vanish on the wave front $a = 1.0$ in view of the limits of the integrals of Eqs. (9). Similarly, the displacements (II) vanish on the wave front $b = 1$ when $\theta < \gamma$. The displacements (III) vanish on the wave front $b = \cos(\theta - \gamma)$. The displacements II, III, must satisfy continuity requirements at $b = 1$, $\theta > \gamma$, but need not vanish individually. In this sense, $b = 1$, $\theta > \gamma$ is not a wave front. These statements must be accepted provisionally at this stage¹⁰.

The Surface Displacements

To examine Eqs. (9) at the surface, we use the substitutions

$$v = \sin \beta, \quad \frac{1}{N(\alpha, \beta)} = \frac{\sqrt{\sin^2 \gamma - v^2}}{v} \left[\frac{(1 - 2v^2) - 4v^2 \sqrt{1 - v^2} \sqrt{\sin^2 \gamma - v^2}}{M} \right],$$

where M is the cubic in Y , (and $Y = v^2$)

$$[1 - 8Y + 8(3 - 2\sin^2 \gamma) Y^2 - 16\cos^2 \gamma Y^3] = -16\cos^2 \gamma \prod_{i=1}^3 (v^2 - g_i^2)$$

¹⁰ A more rigorous proof will be given in subsequent papers. The proof depends upon integrating Eqs. (9) and passing to the limit as we approach each wave front. A similar procedure can be used to obtain the displacements on the axis. The arguments of this paper are not applicable at $\theta = 0$ because the branch points coalesce.

having roots g_1^2, g_2^2, g_3^2 . For any value of Poisson's ratio $0 \leq \nu \leq 1/2$, the roots may be labeled so that g_1^2 and g_2^2 are both less than $\sin^2 \gamma$ while the root $g_3^2 > 1.0$.

Transforming the displacements (I) to an equivalent path in the β plane (defined by Eq. (6)), and using the substitutions

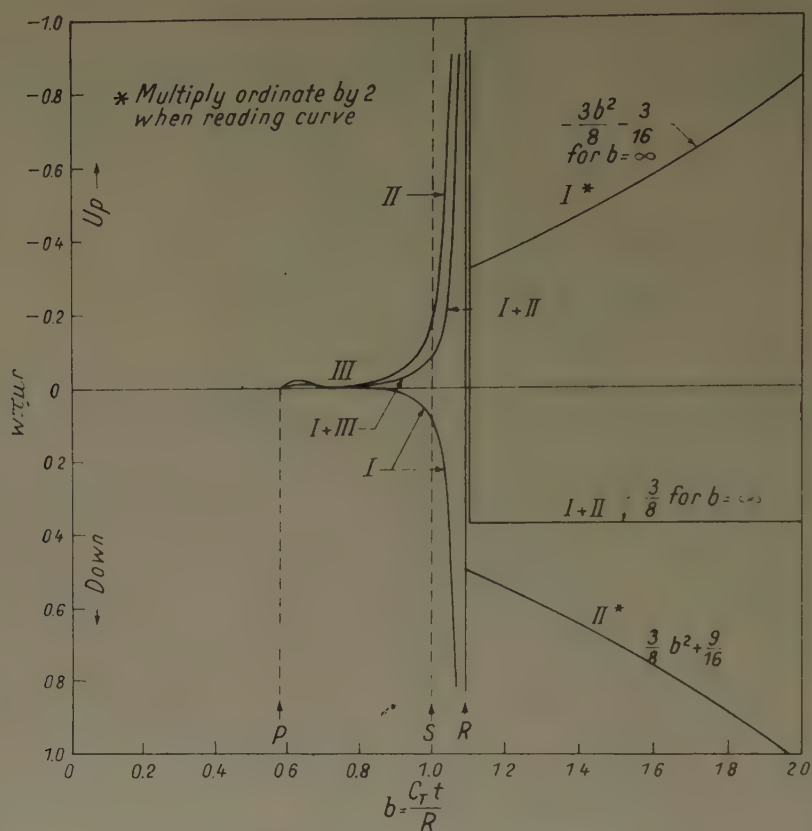
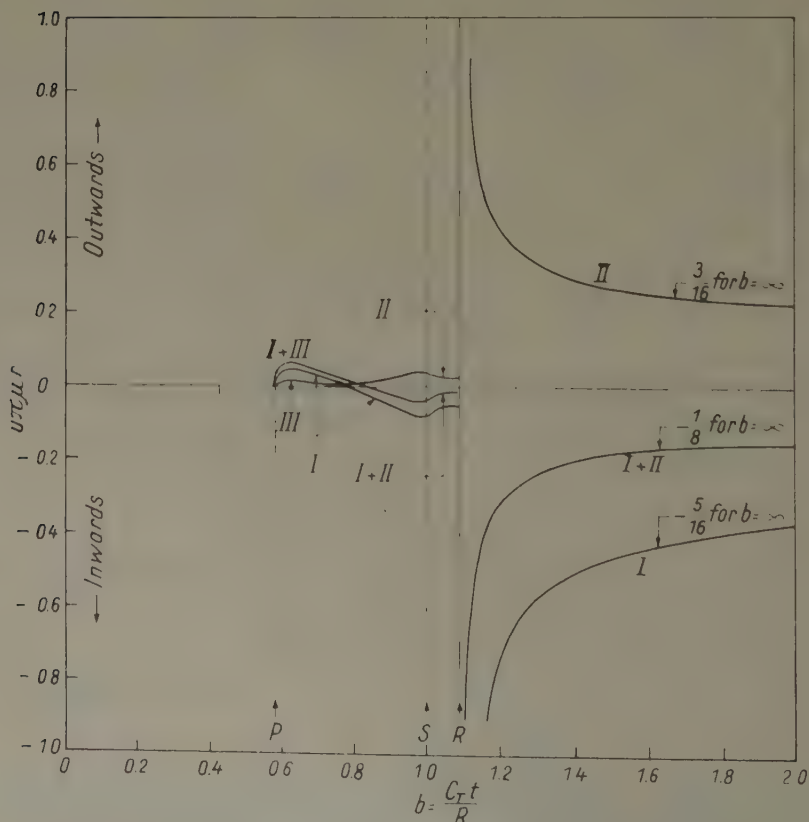
$$\begin{aligned} g_1(v) &= \frac{v \sqrt{v^2 - \sin^2 \gamma} (1 - 2\nu^2)^2}{M \sqrt{b^2 - v^2}}, \\ g_2(v) &= \frac{4\nu^3 \sqrt{v^2 - 1} (v^2 - \sin^2 \gamma)}{M \sqrt{b^2 - v^2}}, \\ r(v) &= \frac{4\nu \sqrt{v^2 - \sin^2 \gamma} \sqrt{1 - v^2} (1 - 2\nu^2)}{M \sqrt{b^2 - v^2}}, \end{aligned}$$

the surface displacements become

$$\left. \begin{aligned} u(\text{I}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b 2\nu^2 r(v) dv & \sin \gamma \leq b \leq 1.0, \\ u(\text{III}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b (1 - 2\nu^2) r(v) dv & \sin \gamma \leq b \leq 1.0, \\ w(\text{I}) &= -\frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b (1 - 2\nu^2) g_1(v) dv & \sin \gamma \leq b \leq 1.0, \\ w(\text{III}) &= -\frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b 2\nu^2 g_1(v) dv & \sin \gamma \leq b \leq 1.0, \\ u(\text{I}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b 2\nu^2 r(v) dv & b \geq 1.0, \\ u(\text{II}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^{1.0} (1 - 2\nu^2) r(v) dv & b \geq 1.0, \\ w(\text{I}) &= \frac{-1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b (1 - 2\nu^2) g_1(v) dv - \frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{1.0}^b (1 - 2\nu^2) g_2(v) dv & b \geq 1.0, \\ w(\text{II}) &= \frac{-1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b 2\nu^2 g_1(v) dv - \frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{1.0}^b 2\nu^2 g_2(v) dv & b \geq 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

The total displacements are

$$\left. \begin{aligned} u(\text{I} + \text{III}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b r(v) dv & 1 \geq b \geq \sin \gamma, \\ u(\text{I} + \text{II}) &= \frac{b}{2\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b r(v) dv & b \geq 1.0, \\ w(\text{I} + \text{III}) &= -\frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b g_1(v) dv & 1 \geq b \geq \sin \gamma, \\ w(\text{I} + \text{II}) &= -\frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{\sin \gamma}^b g_1(v) dv - \frac{1}{\pi^2 r \mu} \int_{1.0}^b g_2(v) dv & b \geq 1.0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (11).$$

Fig. 8. Vertical Displacements I, II, III at Surface of Half-Space for $\nu = 0.25$ Fig. 9. Horizontal Displacements I, II, III at Surface of Half-Space for $\nu = 0.25$

When $\nu = 1/4$, $\sin \gamma = 1/\sqrt{3}$, $M = (3 - 24 Y + 56 Y^2 - 32 Y^3)/3$ and Eqs. (11) reduce identically to the surface displacements of PEKERIS.

The explicit results for POISSON'S ratio, $\nu = 1/4$, obtained from Eqs. (10) are given in the Appendix. The substitutions and integrals required to reduce Eqs. (10) to the results in the Appendix are obtained from the procedure used by PEKERIS to determine total surface displacements.

The surface displacements for $\nu = 1/4$ for each wave system, I, II, III (including the surface wave contribution discussed later) are plotted from the equations of the Appendix and are shown in Figs 8 and 9. The total surface displacements (denoted in the figures by I + II and I + III) were determined by PEKERIS. The determination of individual rather than total surface wave displacements represents one advantage of the method adopted here. Other advantages are discussed in the concluding remarks of this paper.

The Surface (Rayleigh) Wave

There are no singularities on the path for the expressions in Eqs. (10) and (11) when $b < g_3$. When $b > g_3$, the pole at g_3 contributes additional terms. We may indent the path so it is semi-circle about the pole g_3^2 in the complex Y plane (see Fig. 10). There is no real contribution to $w(I)$ or $w(II)$. The contribution to $u(I)$ and $u(II)$ (for any POISSON'S ratio) is

$$u(I) = \frac{b}{16 \pi r \mu \cos^2 \gamma} \frac{(1 - 2 g_3^2)^3}{(g_3^2 - g_2^2)(g_3^2 - g_1^2)} \frac{1}{\sqrt{b^2 - g_3^2}},$$

$$u(II) = \frac{b}{32 \pi r \mu \cos^2 \gamma} \frac{(1 - 2 g_3^2)^4}{g_3^2(g_3^2 - g_2^2)(g_3^2 - g_1^2)} \frac{1}{\sqrt{b^2 - g_3^2}}.$$

For $\nu = 1/4$, these reduce to

$$u(I) = \frac{-b(3 + \sqrt{3})}{16 \pi r \mu \sqrt{b^2 - g_3^2}} \quad \dots \quad (12),$$

$$u(II) = \frac{b(\sqrt{3} + 1)}{16 \pi r \mu \sqrt{b^2 - g_3^2}} \quad \dots \quad (13),$$

$$u(I + II) = \frac{-b}{8 \pi r \mu \sqrt{b^2 - g_3^2}} \quad \dots \quad (14).$$

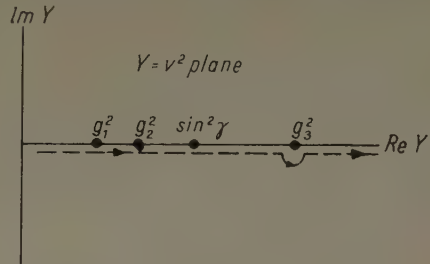


Fig. 10. Path of Displacements I, II at the Surface in the Y Plane

Concluding Remarks

The limiting surface displacements (of the Appendix) represent one example of the interpretation of Eqs. (9). A second interpretation of an elementary nature can be obtained by considering an acoustic medium ($\mu \rightarrow 0$). If the displacements everywhere (which arise only from the P waves) are differentiated with respect to time, the solution, corresponding to a pulse loading in an acoustic medium, is:

$$U = \frac{t \cos \theta}{\pi \mu R^3}, \quad W = \frac{t \sin \theta}{2 \pi \mu R^3}.$$

In front of and behind the pulse, the medium is unstressed and at rest. The pulse travels without dilatation, rotation, or acceleration as noted earlier by STOKES¹¹⁾ and LOVE¹²⁾. Comparison of the two- and three-dimensional solutions exhibits the differences expected between wave propagation in even and odd dimensional space. In particular, only the two-dimensional pulse exhibits a residue or tail¹³⁾.

A third interpretation of Eqs. (9) depends on explicitly completing the integration in order to determine whether the resultant displacements are capable of representing the complete wave field at all points of the halfspace. The discussion and contents of this paper constitute the first part of an investigation which was motivated by this third interpretation. As such, the paper limits itself to the integral relations and partial conclusions necessary to provide the background for the second part of the investigation. The second stage describes the procedure used to obtain the explicit interior displacement equations. There does not appear to be any reasonably concise method of telescoping the entire investigation into a single paper.

¹¹⁾ Ref. [2], p. 279.

¹²⁾ Ref. [3], p. 305.

¹³⁾ Ref. [20], p. 525 & Ref. [18], p. 388.

Acknowledgment

The author is heavily indebted to Mrs. MISAKO FUJISAKI whose attention to computational details removed numerous obstacles.

Bibliography

- [1] H. LAMB, On the Propagation of Tremors Over the Surface of an Elastic Solid, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, ser. A 203 (1904), pp. 1—42.
- [2] G. G. STOKES, *Mathematical and Physical Papers*, vol. 2, Cambridge, England 1883, Cambridge University Press, p. 297.
- [3] A. E. H. LOVE, The Propagation of Wave Motion in an Isotropic Elastic Solid Medium, *Proc. London Math. Soc.* ser. 2, (1904), pp. 291—344.
- [4] H. A. LANG, Nature of Axisymmetric Wave Fields in Elastic Solids, The RAND Corporation, Paper No. P-832, Santa Monica, California, 1956.
- [5] H. A. LANG, Dilatational Surface Waves in an Elastic Half-Space, The RAND Corporation, Paper No. P-1505, Santa Monica, California, 1958.
- [6] H. JEFFREYS, *Seismology*, in: *Reports on Progress in Physics*, Phys. Soc. London, 10 (1946), pp. 58—82.
- [7] E. R. LAFWOOD, The Disturbance Due to a Line Source in a Semi-Infinite Elastic Medium, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, ser. A 242 (1949), pp. 63—100.
- [8] L. CAGNIARD, *Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives*, Paris 1939, Gauthier-Villars.
- [9] W. W. GARVIN, Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem, to appear in *Proc. Roy. Soc.*, ser. A.
- [10] G. MENCHER, Epicentral Displacement Caused by Elastic Waves in an Infinite Slab, *J. Appl. Phys.* 24 (1953), pp. 1240—1246.
- [11] J. H. HUTH and J. D. COLE, A Theoretical Treatment of Spalling, The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1181, Santa Monica, California, 1954.
- [12] J. H. HUTH and J. D. COLE, Impulsive Loading on an Elastic Half-Space, *J. Appl. Mech.* 76 (1954), p. 294.
- [13] B. B. BAKER and E. T. COPSON, *The Mathematical Theory of Huygen's Principle*, Oxford, England 1939, Clarendon Press.
- [14] F. SAUTER, Der flüssige Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche, *ZAMM* 30 (1950), pp. 149—153.
- [15] F. SAUTER, Der elastische Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche (Zweidimensionales Problem), *ZAMM* 30 (1950), pp. 203—215.
- [16] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Edition 2nd, Cambridge 1944, University Press, The MacMillan Company.
- [17] C. J. TRANTER, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, New York 1951, John Wiley & Sons, Inc.
- [18] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, New York 1941, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [19] ANDREW GRAY, G. B. MATHEWS and T. M. MACROBERT, *Bessel Function*, London 1931, MacMillan and Company.
- [20] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Sixth Edition, Cambridge 1932, University Press.
- [21] C. L. PEKERIS, The Seismic Surface Pulse, *Nat. Acad. of Sciences* 41 (1955), pp. 469—480.
- [22] E. PINNEY, Surface Motion Due to a Point Source in a Semi-Infinite Elastic Medium, *Bull. Seism. Soc. Am.* 44 (1954), pp. 571—590.
- [23] C. H. DIX, The Method of Cagniard in Seismic Pulse Problems, *Geophysics* 19 (1954), pp. 722—738.
- [24] C. L. PEKERIS, The Seismic Buried Pulse, *Proc. Nat. Acad. of Sciences* 41 (1955), pp. 629—639.
- [25] C. L. PEKERIS and H. LIFSON, Motion of the Surface of a Uniform Elastic Half-Space Produced by a Buried Pulse, *J. Aeronautical Soc. Am.* 29 (1957), pp. 1233—1238.

Appendix

Explicit expressions for the surface displacements I, II, III are given below for Poisson's ratio = 0.25. The roots of M are

$$g_1^2 = \frac{1}{4}, \quad g_2^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad g_3^2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

For $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1.0$,

$$32 \pi \mu r w(I) = -1 - 6b^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} (b^2 - g_1^2)^{-\frac{1}{2}} + k_1 (b^2 - g_2^2)^{-\frac{1}{2}} - k_2 (g_3^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}},$$

where:

$$k_1 = \sqrt{3\sqrt{3} - 5} - \sqrt{\frac{3}{2}(11\sqrt{3} - 19)}, \quad k_2 = \sqrt{3\sqrt{3} + 5} - \sqrt{\frac{3}{2}(11\sqrt{3} + 19)}.$$

$$32 \pi \mu r w(III) = 7 + 6b^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} (b^2 - g_1^2)^{-\frac{1}{2}} + k_3 (b^4 - g_2^2)^{-\frac{1}{2}} - k_4 (g_3^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}},$$

where:

$$k_3 = \sqrt{\frac{3}{2}(11\sqrt{3} - 19)}, \quad k_4 = \sqrt{\frac{3}{2}(11\sqrt{3} + 19)}.$$

For $1 < b < g_3$,

$$32 \pi \mu r w(\text{I}) = -12 b^2 - 6 - 2 k_2 (g_3^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad 32 \pi \mu r w(\text{II}) = 18 + 12 b^2 - 2 k_4 (g_3^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

For $b > g_3$,

$$32 \pi \mu r w(\text{I}) = -12 b^2 - 6, \quad 32 \pi \mu r w(\text{II}) = 18 + 12 b^2.$$

For $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1.0$,

$$16 \pi^2 \mu r u(\text{I}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} b \{11 K - 8 E - 9 \Pi[8 k^2] + (3 - 3 \sqrt{3}) \Pi[(20 - 12 \sqrt{3}) k^2] \\ + (3 + 3 \sqrt{3}) \Pi[(20 + 12 \sqrt{3}) k^2]\},$$

$$16 \pi^2 \mu r u(\text{III}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} b \{8 E - 5 K - 9 \Pi[8 k^2] + (3 - \sqrt{3}) \Pi[(20 - 12 \sqrt{3}) k^2] \\ + (3 + \sqrt{3}) \Pi[(20 + 12 \sqrt{3}) k^2]\},$$

$$k^2 = \frac{1}{2} (3 b^2 - 1).$$

For $1 < b < g_3$,

$$16 \pi^2 \mu r u(\text{I}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} b k \{4 E (1 - 3 b^2) + (12 b^2 - 1) K - 9 \Pi[8] + (3 - 3 \sqrt{3}) \Pi[20 - 12 \sqrt{3}] \\ + (3 + 3 \sqrt{3}) \Pi[20 + 12 \sqrt{3}]\} \quad (15),$$

$$16 \pi^2 \mu r u(\text{II}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} b k \{4 E (3 b^2 - 1) + (7 - 12 b^2) K - 9 \Pi[8] + (3 - \sqrt{3}) \Pi[20 - 12 \sqrt{3}] \\ + (3 + \sqrt{3}) \Pi[20 + 12 \sqrt{3}]\} \quad (16),$$

$$k^2 = \frac{2}{3 b^2 - 1}.$$

For $b > g_3$,

$$u(\text{I}) = \text{Eq. (12)} + \text{Eq. (15)}, \quad u(\text{II}) = \text{Eq. (13)} + \text{Eq. (16)}.$$

The horizontal displacements contain complete elliptic integrals of all three kinds. The modulus k is specified below the displacements. The elliptic integrals are K , E , $\Pi(n)$ where n is the parameter. The definition of the elliptic integral of the third kind is:

$$\Pi(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Manuskripteingang: 24. 6. 1960

Anschrift: H. A. LANG, The Rand Corporation, Aero-Astronautics Dept., 1700 Main St., Santa Monica, California, USA

ZAMM 41 (1961) Heft 4, Seite 153—158

Longitudinal Vortices in Shear Flow^{*)}

By G. S. S. LUDFORD

Der Einfluß eines Längswirbels auf die Scherströmung an einer Wand wird auf Grund exakter Gleichungen untersucht. Es zeigt sich, daß sich der Wirbel einen Weg unter der Scherströmung und quer zu ihr bahnt und dabei diese von der Wand um einen Betrag abhebt, der von der Entfernung des Wirbels von der Wand, jedoch nicht von seiner Stärke abhängt. Es werden einige Vermutungen vorgebracht hinsichtlich des Verhaltens von Paaren und Gruppen von Längswirbeln.

The effect of a trailing or longitudinal vortex on shear flow near a wall is investigated on the basis of exact equations. It is found that the vortex tunnels under and across the shear flow, lifting the flow away from the wall by an amount depending on the distance of the vortex from the wall but not on its strength. Some conjectures are made concerning the behavior of pairs and groups of longitudinal vortices.

Явление волокающегося или продольного вихря в проходящем вблизи стенки течения изучается на основе точных уравнений. Обнаруживается, что вихрь выбирает себе путь под потоком или поперёк него, отрывая течение от стенки в некоторой мере, зависящей от расстояния вихря от стенки но не от его силы. Далее делаются некоторые предположения о поведении пар и групп продольных вихрей.

^{*)} Research sponsored by the Office of Ordnance Research, U. S. Army, under Contract DA-36-034-ORD-1486.

§ 1. In a recent paper SCHULTZ-GRUNOW [1] has described various experimental conditions under which longitudinal vortices can be produced in the shear flow of a laminar or turbulent boundary layer. The paper contains a bibliography, to which may be added the later work of WESKE [2], with its appendix by BURGERS. See also GÖRTLER's presentation [3].

Under suitable conditions (small enough speeds and smooth enough main flow) the motion is steady. Downstream from a disturbance element, such as a hemispherical cap, thin metal trip or a suction hole, there is a pair of vortex tubes which originate at or close to the element. For a considerable distance these tubes appear to follow the main flow direction, remaining remarkably parallel and distinct. In the case of a suction hole it is not difficult to deflect away one of these tubes at its origin and so obtain, in an extensive region of the flow, a single concentrated vortex lying along the same general direction as the main flow.

The object of the present paper is to give a mathematical description of this last phenomenon and to draw some plausible conclusions concerning pairs and groups of longitudinal vortices. For this purpose we shall consider an incompressible fluid and neglect the effects of viscosity, even though this is the agency which sets up the main shear flow. Observations indicate that its diffusive action is small.

The author is indebted to Professor BURGERS for pointing out this problem. The basic equations were derived by BURGERS in the appendix mentioned above. There is no difficulty in

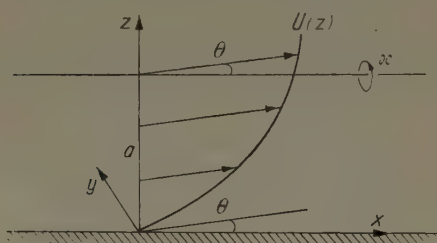


Fig. 1. Rectilinear vortex in shear flow near wall

the case of uniform flow in the absence of a wall: a rectilinear vortex may always be placed along the flow direction to form a combined motion. However, this cannot be done in the case of shear flow. We shall see that the presence of the wall is essential. The vortex is set at some angle θ to the main flow (fig. 1) and it then has a tendency to move. This can be cancelled by the induced effect of the wall or, what is the same thing, of the image vortex, and thereby the angle θ is fixed¹).

Of course, an inclination θ is also necessary for uniform flow in the presence of a wall. However, certain features of the combined motion which are immediately evident for shear flow are obscured for uniform flow (due to its uniformity, for which displacement of the flow is not apparent). The vortex tunnels underneath the shear flow, lifting it away from the wall by an amount depending on its distance from the wall, but not on its strength. Hence the disturbance caused by an arbitrarily weak vortex is not of the same small order. Moreover, inside the tunnel the flow is to some extent arbitrary, presumably being fixed by conditions upstream at its point of formation. Thus as the wall recedes to infinity the original flow (uniform or shear) is pushed away to infinity, and whereas uniform flow along the direction of the now isolated vortex can be regained by suitable prescription within the tunnel at each stage, shear flow cannot.

§ 2. We assume that in the original flow, undisturbed by the vortex, the velocity depends only on distance z from the wall and denote it by $U(z)$. We further assume that the vortex stays at a constant distance $z = a$ from the wall and at a constant angle θ to the undisturbed flow, and ask for a disturbed flow which is independent of x , distance measured along the vortex.

Steady flow patterns which do not vary in the x -direction satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, & v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

From these it follows that v, w are the velocity components of a plane flow in the y, z -plane and that u is constant on the streamlines of this flow:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u = f(\psi) \dots \dots \dots (2),$$

¹) This is familiar also from lifting line theory, where each trailing vortex is actually inclined at a small downward angle to the uniform incident flow, due to the downwash induced by the rest of the vortex system.

where $\psi(y, z)$ is the corresponding streamfunction and f is as yet undetermined. The equation satisfied by ψ is, as usual,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \omega(\psi) = 0 \quad (3),$$

where the vorticity $\omega(\psi)$ (in the plane flow) must be prescribed. Note that the vortex vector of the flow out of the plane is

$$\left(0, \frac{\partial u}{\partial z}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f'(\psi) (0, v, w) \quad (4),$$

so that the vortex lines are the streamlines of the plane flow, the vorticity on any line being proportional to the spacing between the lines.

In the present problem the flow in the y, z -plane tends to the undisturbed shear flow $v = U(z) \sin \theta$, $w = 0$ at large distances, for which

$$\psi = \sin \theta \int_0^z U(\xi) d\xi, \quad \omega = -U'(z) \sin \theta.$$

Hence, in that part of the flow which is covered by streamlines originating at infinity ($\psi > 0$, see fig. 2), $\omega(\psi)$ is obtained by eliminating z between these two equations. Elsewhere it may be prescribed arbitrarily. The problem then is to find a solution of (3) for which

$$\left. \begin{aligned} \psi &\sim \frac{\kappa}{2\pi} \log r_1 \quad \text{near } r_1 = 0, \\ \psi &= 0 \quad \text{on } z = 0, \\ \psi &\rightarrow \sin \theta \int_0^z U(\xi) d\xi \quad \text{as } \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

Here κ , the strength of the vortex, is assumed to be given; the angle θ must finally be chosen so that the vortex is free, i. e.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi - \frac{\kappa}{2\pi} \log r_1 \right) = 0 \quad \text{at } r_1 = 0 \quad (6).$$

§ 3. This program can be carried out explicitly in the case of a uniform shear flow

$$U(z) = kz,$$

for which

$$\omega(\psi) = -k \sin \theta, \quad \text{constant} \quad (7)$$

at points on streamlines which originate at infinity. For simplicity ω will be given this value everywhere. Clearly the function

$$\psi = \frac{1}{2} (k \sin \theta) z^2 + \frac{\kappa}{2\pi} \log r_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \log r_2$$

satisfies the differential equation (3), when ω is given by (7), and the conditions (5). The first term is the undisturbed shear flow in the plane; the second and third are the potential flows of the vortex and its image in $z = 0$. To satisfy (6) we must take

$$\sin \theta = \frac{\kappa}{4\pi a^2 k} \quad (8).$$

Clearly there is a limit

$$\kappa = 4\pi a^2 k$$

to the strength of the vortex for which this solution is valid. The streamfunction may now be written

$$\psi = \frac{\kappa}{2\pi} \left[\left(\frac{z}{2a} \right)^2 + \log \frac{r_1}{r_2} \right] \quad (9).$$

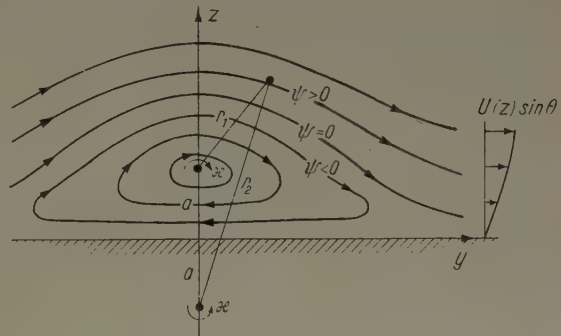


Fig. 2. Flow in cross-planes for $U = kz$

²) In plane motion a uniform shear flow may be superimposed on any potential flow.

The pressure is given by

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2}(v^2 + w^2) - \omega \psi,$$

as is easily verified from (1).

Finally, there is the velocity component u out of the y, z -plane, which at large distances must tend to its undisturbed value $(k \cos \theta) z$. Since

$$\psi \sim \frac{\kappa}{8\pi a^2} z^2, \quad z \sim \sqrt{\frac{8\pi a^2}{\kappa} \psi}$$

at large distances, we must take

$$f(\psi) = k \cos \theta \sqrt{\frac{8\pi a^2}{\kappa} \psi} = \frac{\kappa}{2\pi a} \cot \theta \sqrt{\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \log \frac{r_1}{r_2}} \dots \dots \dots (10)$$

in (2). This result only holds where the expression under the radical sign is positive, i. e. at points on streamlines ($\psi > 0$) which originate at infinity. On the closed streamlines ($\psi < 0$) in fig. 2, u may be prescribed arbitrarily.

On the streamline $\psi = 0$ which lies over these closed streamlines, $u = 0$ and one possibility is that u vanishes on them also. In this case the vortex produces a purely circulatory motion in a sort of tunnel underneath the raised shear flow.

Equation (9) shows that all flows in the y, z -plane are similar. On the z -axis

$$\psi = \frac{\kappa}{2\pi} \left[\left(\frac{z}{2a} \right)^2 + \log \left| \frac{z-a}{z+a} \right| \right];$$

a graph of $2\pi\psi/\kappa$ versus z/a is given in fig. 3. It shows that at its highest point the shear flow is raised to about twice (2.06) the height of the vortex above the plane. Note that this result is

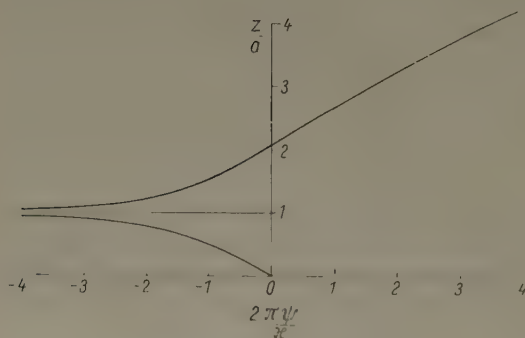


Fig. 3. Variation of ψ on z -axis for $U = kz$

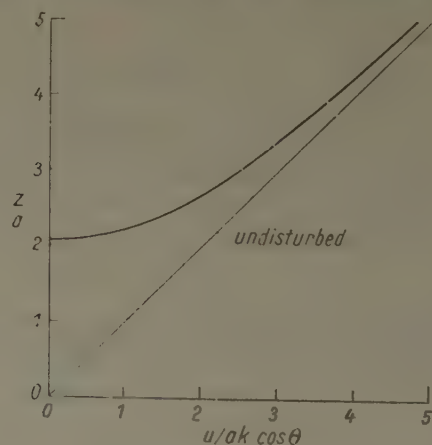


Fig. 4. Variation of u on z -axis for $U = kz$

independent of the strength of the vortex: the disturbance caused by a very weak vortex is not of the same order of smallness. Complete flows are similar only if the parameter $\kappa/a^2 k$ (i. e. θ) is the same, see (10).

As was mentioned before [see equation (4)], the vortex lines of the shear flow out of the y, z -plane are the streamlines of the flow in this plane, the vorticity on any line being proportional to the spacing between the lines. Thus the vorticity is everywhere increased by the lifting, and in fact becomes infinite on the lowest line $\psi = 0$ [since $f'(0) = \infty$, see (10)]. This is illustrated in fig. 4, which gives the variation of $u/ak \cos \theta$ on the z -axis. The straight line in this figure represents the undisturbed flow.

This infinite velocity gradient is not typical; U must vanish at the wall for it to occur. Consider the uniform shear flow

$$U = k(z + z_0),$$

which, with $z_0 > 0$, would perhaps be a better model for boundary layers. Equations (8), (9), and (10) are replaced by

$$\sin \theta = \frac{\kappa}{4\pi a(a+z_0)k} \quad \dots \dots \dots (8'),$$

$$\psi = \frac{\kappa}{2\pi} \left[\frac{z^2 + 2zz_0}{4a(a+z_0)} + \log \frac{r_1}{r_2} \right] \quad \dots \dots \dots (9'),$$

$$f(\psi) = k \cos^2 \theta \sqrt{z_0^2 + \frac{8\pi a(a+z_0)}{\kappa} \psi} = \frac{\kappa}{2\pi \sqrt{a(a+z_0)}} \cot \theta \sqrt{\frac{(z+z_0)^2}{4a(a+z_0)} + \log \frac{r_1}{r_2}} \quad (10').$$

Now $f'(0)$ is finite; also the flows in the y, z -plane have a similarity parameter $\alpha = a/z_0$, and the tunnel is closed at the points $y = \pm \sqrt{4\alpha + 3}$ (fig. 5).

§ 4. The flow due to a single isolated vortex may always be superimposed on a uniform flow by placing the axis of the vortex along the direction of the stream. The fact that this was no longer possible for a uniform shear flow was the starting point of the present investigation. The reason for this is now clear. If in these last three equations we let $a \rightarrow \infty$, keeping $a + z_0$ and $z + z_0$ fixed, then certainly $\theta \rightarrow 0$. But in the y, z -plane the flow tends to that of the given vortex, i. e. the shear flow is split apart by the vortex and pushed off to infinity in all directions. Whether this disruptive effect of longitudinal vortices on shear flow has a physical significance is an interesting open question.

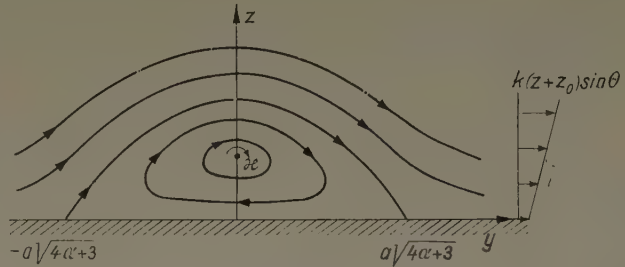


Fig. 5. Flow in cross-planes for $U = k(z + z_0)$, z_0 positive ($\alpha = a/z_0$)

In the solution presented above certain choices were made for the values of ω and u on the closed streamlines. In fact they will be determined by the mechanism which produces the vortex. In WESKE's experiments using a suction hole there is evidence that u is non-zero. This does not alter the above analysis, but only fig. 4. A different distribution of ω would affect the solution, though probably only qualitatively. However, it leads to a difficult mathematical problem of the free-boundary type for the differential equation (3). In this connection there would be a case for eliminating the concentration of vorticity at the vortex and distributing it smoothly over the closed streamlines. Similar difficulties arise if a non-uniform shear flow is considered.

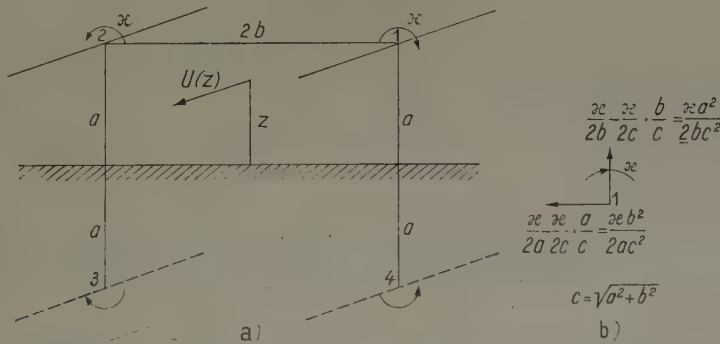


Fig. 6. Vortex pair in shear flow near wall

§ 5. No such simple treatment is possible when there is a pair of vortices at the same distance from the wall. Each separately would require a different inclination of the shear-flow direction. If the distance $2b$ between the vortices is large compared to a , the flow near either one is presumably of the type just indicated. Accordingly a pair which produce upwash between themselves (fig. 6) would converge in the shear-flow direction.

On the other hand, experimental evidence [2] shows that a and b are comparable and $a > b$ in certain circumstances, so that the mutual interaction of the vortices cannot be neglected. When $\kappa/a^2 k$ is small, see (8), it is reasonable to assume that this interaction may be computed as if the vortices remained parallel to each other and the wall. Fig. 6(b) shows the velocities induced at the vortex 1 by the vortex 2 and the image vortices 3 and 4 under this assumption. The components are always positive as drawn. The only other velocity with which the vortex 1 tends to

move is that of the main shear flow, effectively³⁾. In order to be free the vortex must therefore point slightly inwards and upwards from the shear-flow direction, the direction cosines being

$$\frac{\kappa b^2}{2 a c^2 U(a)} \quad \text{and} \quad \frac{\kappa a^2}{2 b c^2 U(a)},$$

respectively. This convergence and rising of the vortex pair is also observed [2], though no quantitative results are available. A further conjecture is that their disruptive action will continually increase as they rise.

The behavior of groups of longitudinal vortices may be conjectured similarly. In particular, an infinite array of vortices, equally spaced at the same distance from the wall, and of equal but alternately opposite rotation, will tend to converge in pairs as before but not rise⁴⁾.

References

- [1] F. SCHULTZ-GRUNOW, Zur Entstehung von Längswirbeln in Grenzschichten, ZAMM 38 (1958), S. 85—95.
- [2] J. R. WESKE, Experimental study of detail phenomena of transition in boundary layers, Tech. Note BN-91 (1957), Contract AF 18 (600) 893, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland. [Appendix I: J. M. BURGERS, On steady flow patterns appearing when a sink is combined with boundary layer flow.]
- [3] H. GÖRTLER, Einige neuere Ergebnisse zur hydrodynamischen Stabilitätstheorie, Z. Flugwiss. 8 (1960), S. 1—8.

³⁾ There will be higher-order corrections due to the fact that the flows are not strictly superposable.

⁴⁾ In fig. 6(b) the vertical velocity is now zero, while the horizontal (due solely to the images) is

$$\frac{\kappa}{2a} + \kappa a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + (2n b)^2} - \kappa a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + (2n-1 b)^2} = \frac{\pi \kappa}{4b} \left(\coth \frac{\pi a}{2b} - \tanh \frac{\pi a}{2b} \right),$$

which is again always positive.

Manuskripteingang: 14. 7. 1960

Anschrift: Prof. G. S. S. LUDFORD, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Univ. of Maryland, College Park, Maryland, USA. Now at Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island, USA

ZAMM 41 (1961) Heft 4, Seite 158—180

Der Spannungszustand in einer geschichteten Scheibe^{*)}

VON HANS BUFLER

Es wird das zweidimensionale, ebene Problem der Spannungsbestimmung in einem aus einzelnen homogenen und isotrop-elastischen Schichten mit beliebigen Elastizitätskonstanten und beliebigen Höhen bestehenden Körper bei gegebener Randbelastung oder Randverschiebung mit Hilfe der Fourier-Transformation allgemein gelöst, und zwar sowohl für den Grenzfall vollkommener Haftung als auch den Grenzfall verschwindender Reibung zwischen den Schichten. Als Beispiele werden die homogen-geschichtete Halbscheibe und die Halbscheibe mit anschließendem Streifen behandelt.

By means of Fourier transformation a general solution is found for the plane problem of determining the stresses in a body consisting of homogeneous elastically isotropic layers of arbitrary elastic moduli and arbitrary heights when the boundary load or the boundary displacement is given; the solution applies both to the limiting case of perfect adhesion and to the limiting case of zero friction between the layers. Examples treated are the homogeneously laminated half-plane and the half-plane with adjacent strip.

При помощи преобразования Фурье решается в общем виде двухмерная плоская задача определения напряжений в теле, состоящем из отдельных однородных и изотропно эластичных слоев с произвольными модулями Юнга и произвольной высоты при заданной нагрузке или при заданном смещении края, а именно как для случая полного прилипания, так и для случая ничтожного трения между отдельными слоями. В качестве примеров рассматриваются однородно слоистая полупластинка и полупластинка с примыкающей к ней полосой.

1. Problemstellung

Der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist die Bestimmung des Spannungszustandes in einer aus einzelnen Schichten aufgebauten elastischen Scheibe bei gegebener (periodischer oder nichtperiodischer) Randbelastung bzw. Randverschiebung. Als Schichten werden dabei lauter

^{*)} Von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München genehmigte Habilitationsschrift (Referenten: Prof. Dr. L. FÖRPL und Prof. Dr. H. NEUBER).

unendlich lange, homogene und isotrope Streifen mit beliebigen Elastizitätskonstanten und beliebigen Höhen, jedoch gleichen Breiten zugrunde gelegt. Ist die Breite der Schichten sehr viel größer als ihre jeweilige Höhe, so wird sich im wesentlichen ein ebener Formänderungszustand einstellen; ist die Breite dagegen klein im Vergleich zur Schichthöhe, dann kann man von einem ebenen Spannungszustand sprechen.

Die zwischen den einzelnen Schichten auftretenden, vom jeweiligen Reibungskoeffizienten abhängigen Reibungskräfte haben maßgebenden Einfluß auf die Größe und die Verteilung der Spannungen. Es lassen sich dabei zwei Extremfälle unterscheiden: Der Grenzfall vollkommener Haftung und der Grenzfall verschwindender Reibung, bei dem nur senkrecht zu den Schichten wirkende Kräfte möglich sind.

Nach Aufstellung der Lösung für einen beliebig belasteten einzelnen Streifen mit Hilfe der Methode der FOURIER-Transformation werden die Berühr- und Haftbedingungen (letztere entfallen bei Reibungsfreiheit) formuliert. Diese ergeben sich als System linearer homogener Gleichungen für die Transformatierten der Randspannungen der Schichten. Für einige Sonderfälle werden geschlossene Lösungen angegeben.

Die Behandlung des rotationsymmetrischen Belastungsfalles eines geschichteten Körpers ist auf analoge Weise mit Hilfe der HANKEL-Transformation möglich und soll einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben.

2. Mathematische Vorbemerkungen

Bei der Untersuchung des Spannungszustandes in einem unendlich langen Streifen mit parallelen Rändern (weiterhin kurz Streifen genannt) kommen — je nachdem eine periodische oder nichtperiodische Randbelastung vorliegt — FOURIER-Reihen oder FOURIER-Integrale vor.

Für die FOURIER-Reihe der periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periodenlänge $2l$ gilt — falls $f(x)$ im Intervall $(-l, l)$ die DIRICHLET-Bedingungen¹⁾ erfüllt und $\int_{-l}^{+l} f(x) dx$ absolut konvergiert — die komplexe Darstellung²⁾

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x},$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2l} \cdot \int_{-l}^{+l} f(u) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot u} du \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Nach Einsetzen von c_{-n} in die erste Gleichung erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2l} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{+l} f(u) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot (u-x)} \cdot du = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \cdot \int_{-l}^{+l} f(u) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot (u-x)} \cdot du \quad (1*).$$

An einer Sprungstelle liefert (1*) statt $f(x)$ den Wert $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$. Die (eindimensionale) endliche FOURIER-Transformierte der Funktion $f(u)$ (oder $f(x)$) sei in ihrer komplexen Form als von der diskret Veränderlichen n abhängige Funktion definiert durch

$$\bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{+l} f(u) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot u} \cdot du = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \int_{-l}^{+l} f(x) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x} dx \quad (2*).$$

Gilt nun für $f(x)$ die Darstellung (1*), dann folgt in Verbindung mit (2*) für die inverse Transformierte der Funktion $\bar{f}(\pi n/l)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x} \quad (3*)$$

¹⁾ Die Funktion $f(x)$ erfüllt im Intervall (a, b) die DIRICHLET-Bedingungen, wenn sie in (a, b) eine begrenzte Anzahl von Maxima und Minima und eine begrenzte Anzahl von endlichen Sprungstellen — dagegen keine unendliche Sprungstelle — besitzt.

²⁾ Vgl. z. B. G. P. TOLSTOW, Fourierreihen, Berlin 1955, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 33.

und, je nachdem $\bar{f}(\pi n/l)$ eine gerade (d. h. $\bar{f}(\pi n/l) = \bar{f}(-\pi n/l)$) oder eine ungerade Funktion (d. h. $\bar{f}(\pi n/l) = -\bar{f}(-\pi n/l)$) ist,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x & \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \text{ gerade} \\ -i \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x & \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3'')$$

Schreibt man in (1*) $\lambda = \pi n/l$ und führt anschließend den Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ durch, so geht diese Gleichung formal über in die komplexe Form der FOURIERSchen Integralformel³⁾

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot e^{i\lambda \cdot (u-x)} du, \quad (4')$$

welche sich für die Darstellung der nicht-periodischen Funktion $f(x)$ eignet. Voraussetzung ist auch hier, daß $f(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ die DIRICHLET-Bedingungen erfüllt und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ absolut konvergiert. Ferner liefert (4*) an einer Sprungstelle statt $f(x)$ den Wert $1/2 [f(x+0) + f(x-0)]$. Definitionsgemäß ist nun die (eindimensionale) FOURIER-Transformierte der Funktion $f(u)$ (oder $f(x)$) in komplexer Schreibweise

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot e^{i\lambda u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\lambda x} dx \quad (5').$$

Im Gegensatz zu n handelt es sich bei λ um eine kontinuierliche Veränderliche. Falls für die Funktion $f(x)$ die FOURIERSche Integralformel gültig ist, erhält man daraus in Verbindung mit (5*) die inverse FOURIER-Transformierte der Funktion $\bar{f}(\lambda)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (6').$$

Je nachdem, ob $\bar{f}(\lambda)$ eine gerade oder eine ungerade Funktion ist, ergibt sich aus (6*)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \begin{cases} \int_0^{\infty} \bar{f}(\lambda) \cdot \cos \lambda x \cdot d\lambda & \bar{f}(\lambda) \text{ gerade} \\ -i \int_0^{\infty} \bar{f}(\lambda) \cdot \sin \lambda x \cdot d\lambda & \bar{f}(\lambda) \text{ ungerade} \end{cases} \quad (6'').$$

Die FOURIER-Transformierte der Ableitung einer Funktion läßt sich — wie man durch partielles Integrieren der rechten Seite von (2*) bzw. (5*) zeigen kann⁴⁾ — unter der Voraussetzung, daß die ersten $(r-1)$ Ableitungen von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm l$ bzw. für $x \rightarrow \pm \infty$ verschwinden, darstellen durch

$$\bar{f}^{(r)}\left(\frac{\pi n}{l}\right) = \left(-i \frac{\pi n}{l}\right)^r \cdot \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \quad (7')$$

bzw.

$$f^{(r)}(\lambda) = (-i\lambda)^r \cdot \bar{f}(\lambda) \quad (8').$$

Dabei bedeuten

$$\bar{f}^{(r)}\left(\frac{\pi n}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \int_{-l}^{+l} \frac{d^r f(x)}{dx^r} \cdot e^{i \frac{\pi n}{l} x} dx \quad (9')$$

und

$$f^{(r)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f(x)}{dx^r} \cdot e^{i\lambda x} dx \quad (10').$$

³⁾ Wegen des Beweises s. z. B. I. N. SNEDDON, Fouriertransforms, New York/Toronto/London 1951, Mc. Graw-Hill Book Comp. INC, S. 15.

⁴⁾ Ebendort, S. 27.

3. Spannungen und Formänderungen eines Streifens

Als Voraufgabe für die elastizitätstheoretische Behandlung eines geschichteten Mediums muß der Spannungs- und Verformungszustand eines einzelnen Streifens, dessen Randspannungen vorgegeben sind, bestimmt werden.

Es gelten folgende Spannungs-Dehnungs-Beziehungen:

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1a),$$

$$\varepsilon_y \equiv \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1b),$$

$$\varepsilon_z \equiv \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1c),$$

$$\gamma_{xy} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (1d),$$

$$\gamma_{yz} \equiv \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{yz} \quad (1e),$$

$$\gamma_{zx} \equiv \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{zx} \quad (1f).$$

x, y, z sind die kartesischen Koordinaten, u, v, w die Verschiebungen in x, y, z -Richtung, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Normal- und $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ die Schubspannungen. E bedeutet den Elastizitätsmodul und ν die Querdehnzahl. Liegt ein ebener Formänderungszustand vor, so reduzieren sich die Gl. (1a) bis (1f) wegen $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ auf

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \sigma_x - (\nu + \nu^2) \sigma_y] \quad (2a),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \sigma_y - (\nu + \nu^2) \sigma_x] \quad (2b),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (2c).$$

Beim ebenen Spannungszustand erhält man dagegen wegen $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad (3a),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad (3b),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (3c).$$

Der Vergleich der Formeln (2) und (3) zeigt, daß man die entsprechenden Beziehungen des ebenen Spannungszustandes aus denen des ebenen Formänderungszustandes dadurch gewinnt, daß man (bei festgehaltenem E) die quadratischen Glieder von ν streicht. Hätte man statt des Elastizitätsmoduls E den Schubmodul G gemäß $G = E/[2(1+\nu)]$ eingeführt, so käme man von den Formeln des ebenen Formänderungszustandes zu denjenigen des ebenen Spannungszustandes dadurch, daß man (bei festgehaltenem G) statt ν den Ausdruck $\nu/(1+\nu)$ setzte. Wir legen im folgenden die Gleichungen des ebenen Formänderungszustandes nach (2) zugrunde und können die dafür abzuleitenden Formeln mit $\nu^2 = 0$ sofort in diejenigen des ebenen Spannungszustandes überführen.

Zu den Formänderungsbeziehungen (2) bzw. (3) kommen noch die Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen am Element $dx \cdot dy$ hinzu. Diese lauten (sowohl für den ebenen Formänderungszustand als den ebenen Spannungszustand) bei Abwesenheit von Massenkräften:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (4a),$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (4b).$$

Hierbei wurde $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ gesetzt, was aus der Momenten-Gleichgewichtsbedingung am Element folgt.

Der Streifen erstreckt sich über den Bereich $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq h$ (Bild 1). Stellt man die Spannungen und Verschiebungen (bei nicht-periodischer Belastung) durch ein FOURIER-sches Integral entsprechend (6*)

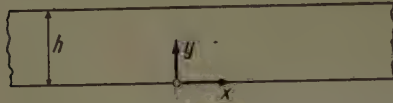


Bild 1. Der unendliche Streifen mit parallelen Rändern

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, y) \cdot e^{-i\lambda x} \cdot d\lambda \quad \dots (5)$$

dar, so lassen sich die Randbedingungen längs $y = 0$ und längs $y = h$ befriedigen. Die in (5) als Parameter erscheinende Größe y muß deswegen eingeführt werden, weil die Spannungen und Verschiebungen sowohl von der Koordinate x als auch von der Koordinate y abhängen. Die FOURIER-Transformierte zu $f(x, y)$ lautet gemäß (5*)

$$\bar{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{i\lambda x} \cdot dx \quad \dots (6)$$

Im Fall einer periodischen Belastung sind statt (5) und (6) die Transformationsformeln (s. (3*) und (2*))

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x} \quad \dots (5')$$

und

$$\bar{f}\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \int_{-l}^{+l} f(x, y) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot x} \cdot dx \quad \dots (6')$$

zu verwenden.

Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten müssen (beim ebenen Formänderungszustand) die partiellen Differentialgleichungen (2a), (2b), (2c) und (4a), (4b) erfüllen. Multipliziert man diese Gleichungen mit $e^{i\lambda x}$ und integriert über die gesamte x -Achse, so erhält man nach (6) bei Beachtung von (8*) für die FOURIER-Transformierten folgende fünf gewöhnliche, lineare und homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten⁶⁾:

$$-i\lambda \bar{u}(\lambda, y) = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \bar{\sigma}_x(\lambda, y) - (\nu + \nu^2) \bar{\sigma}_y(\lambda, y)] \quad \dots (7),$$

$$D \bar{v}(\lambda, y) = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \bar{\sigma}_y(\lambda, y) - (\nu + \nu^2) \bar{\sigma}_x(\lambda, y)] \quad \dots (8),$$

$$D \bar{u}(\lambda, y) - i\lambda \bar{v}(\lambda, y) = \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \bar{\tau}(\lambda, y) \quad \dots (9),$$

$$-i\lambda \bar{\sigma}_x(\lambda, y) + D \bar{\tau}(\lambda, y) = 0 \quad \dots (10),$$

$$D \bar{\sigma}_y(\lambda, y) - i\lambda \bar{\tau}(\lambda, y) = 0 \quad \dots (11).$$

D bedeutet dabei den Operator d/dy . Genau auf dieselben Gleichungen kommt man bei Verwendung der Transformation (6'), sofern man in (7) bis (11) λ durch $\pi n/l$ ersetzt.

Nach den Regeln der Operatorenrechnung können vorstehende Gleichungen nur dann bestehen, wenn die von den Koeffizienten bzw. Operatoren der Spannungs- und Verschiebungskomponenten gebildete Determinante, angewandt auf irgendeine der Spannungs- oder Verschiebungsgrößen, verschwindet. Diese Bedingung führt zu

$$(D^2 - \lambda^2)^2 \bar{g}(\lambda, y) = 0 \quad \dots (12),$$

wobei für $\bar{g}(\lambda, y)$ entweder $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}$, \bar{u} oder \bar{v} gesetzt werden kann. Die Lösung der Differentialgleichung (12) lautet mit C_1, C_2, C_3, C_4 bzw. A, B, C, D als „Integrationskonstanten“⁶⁾

$$\bar{g}(\lambda, y) = C_1(\lambda) \cdot e^{|\lambda|y} + C_2(\lambda) \cdot e^{-|\lambda|y} + C_3(\lambda) \cdot |\lambda|y \cdot e^{|\lambda|y} + C_4(\lambda) \cdot |\lambda|y \cdot e^{-|\lambda|y},$$

⁶⁾ Vgl. hierzu: I. N. SNEDDON and D. S. BERRY im Handbuch der Physik, Bd. 6, Berlin 1958, Springer-Verlag, S. 74; dort wird die unendliche Halbscheibe bei nicht-periodischer senkrechter Randbelastung nach dieser Methode, bei der sich die Einführung einer Spannungsfunktion erübrigt, behandelt.

⁶⁾ Wir schreiben „Konstanten“, um damit anzudeuten, daß diese Größen unabhängig von der Koordinate y sind; dagegen sind sie im allgemeinen eine Funktion von λ .

oder in anderer Form geschrieben⁷⁾

$$\bar{g}(\lambda, y) = A(\lambda) \cdot \mathfrak{Cof} |\lambda| y + B(\lambda) \cdot \mathfrak{Sin} |\lambda| y + C(\lambda) \cdot |\lambda| y \cdot \mathfrak{Cof} |\lambda| y + D(\lambda) \cdot |\lambda| y \cdot \mathfrak{Sin} |\lambda| y \quad (13).$$

Setzen wir jetzt $\bar{\sigma}_y = \bar{g}$, so erhalten wir der Reihe nach aus (11), (10), (7) und (9)

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, y) = \bar{g}(\lambda, y) \quad (14),$$

$$\bar{\tau}(\lambda, y) = -\frac{i D}{\lambda} \bar{g}(\lambda, y) \quad (15),$$

$$\bar{\sigma}_x(\lambda, y) = -\frac{D^2}{\lambda^2} \bar{g}(\lambda, y) \quad (16),$$

$$\bar{u}(\lambda, y) = -\frac{i}{\lambda E} \cdot \left[(1 - \nu^2) \cdot \frac{D^2}{\lambda^2} + (\nu + \nu^2) \right] \bar{g}(\lambda, y) \quad (17),$$

$$\bar{v}(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda E} \cdot \left[(2 + \nu - \nu^2) \frac{D}{\lambda} - (1 - \nu^2) \frac{D^3}{\lambda^3} \right] \bar{g}(\lambda, y) \quad (18).$$

Die in (13) auftretenden „Integrationskonstanten“ A, B, C, D müssen durch die Randbedingungen festgelegt werden. Bei gegebener Randbelastung handelt es sich um das sog. erste Randwertproblem; als bekannt vorausgesetzt sind hier längs $y = 0$ die Druckverteilung $\bar{p}(x)$ und die Schubverteilung $\bar{q}(x)$ und längs $y = h$ die Druckverteilung $p(x)$ und die Schubverteilung $q(x)$ (Bild 2). Die Randbedingungen lauten also:

$$\begin{aligned} \tau(x, 0) &= -\bar{q}(x); & \tau(x, h) &= -q(x); \\ \sigma_y(x, 0) &= -\bar{p}(x); & \sigma_y(x, h) &= -p(x); \end{aligned}$$

oder transformiert

$$\bar{\tau}(\lambda, 0) = -\bar{\bar{q}}(\lambda) \quad (19a),$$

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, 0) = -\bar{\bar{p}}(\lambda) \quad (19b),$$

$$\bar{\tau}(\lambda, h) = -\bar{q}(\lambda) \quad (19c),$$

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, h) = -\bar{p}(\lambda) \quad (19d).$$

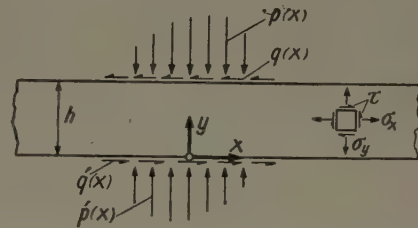


Bild 2. Randbelastung des Streifens

Verwendet man nun \bar{g} nach (13) in (14) und (15), so führen vorstehende Randbedingungen zu:

$$i \bar{\bar{q}}(\lambda) = -\frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot [B + C] \quad (20a),$$

$$\bar{\bar{p}}(\lambda) = -A \quad (20b),$$

$$i \bar{q}(\lambda) = -\frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot [A \mathfrak{S} + B \mathfrak{C} + C(|\lambda| h \mathfrak{S} + \mathfrak{C}) + D(|\lambda| h \mathfrak{C} + \mathfrak{S})] \quad (20c),$$

$$\bar{p}(\lambda) = -[A \mathfrak{C} + B \mathfrak{S} + C|\lambda| h \mathfrak{C} + D|\lambda| h \mathfrak{S}] \quad (20d).$$

Zur Abkürzung wurde dabei

$$\mathfrak{Sin} |\lambda| h = \mathfrak{S}; \quad \mathfrak{Cof} |\lambda| h = \mathfrak{C}$$

geschrieben. Nach Elimination von A und B in (20c) und (20d) mittels (20a) und (20b) folgt:

$$C = \frac{-(|\lambda| h + \mathfrak{S} \mathfrak{C}) \bar{\bar{p}} + (|\lambda| h \mathfrak{C} + \mathfrak{S}) \bar{\bar{p}} - i \frac{\lambda}{|\lambda|} \mathfrak{S}^2 \bar{\bar{q}} - i \frac{\lambda}{|\lambda|} |\lambda| h \cdot \mathfrak{S} \bar{\bar{q}}}{\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2} \quad (20e),$$

$$D = \frac{\mathfrak{S}^2 \bar{\bar{p}} - |\lambda| h \mathfrak{S} \bar{\bar{p}} - i \frac{\lambda}{|\lambda|} (|\lambda| h - \mathfrak{S} \mathfrak{C}) \bar{\bar{q}} + i \frac{\lambda}{|\lambda|} (|\lambda| h \mathfrak{C} - \mathfrak{S}) \bar{\bar{q}}}{\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2} \quad (20f).$$

⁷⁾ Da — mit Ausnahme der „Integrationskonstanten“ A, B, C, D — in (13) λ stets eine positive Größe bedeutet, während die sonst vorkommenden λ sowohl positiv als auch negativ sein können, sind dort an den entsprechenden Stellen (auch da, wo es nicht unbedingt erforderlich wäre, z. B. bei $\mathfrak{Cof} |\lambda| y$) Absolutstriche angebracht.

Wir setzen nun die gefundenen Ausdrücke für A , B , C , D in (13) und dann (13) in die Formeln (14) bis (18) ein. Sodann erhalten wir für die transformierten Spannungs- und Verschiebungskomponenten, wenn wir zur Abkürzung

$$j = i \frac{\lambda}{|\lambda|}$$

einführen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\lambda, y) = \frac{-1}{\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2} \{ & (\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2) \bar{p} \cos |\lambda| y - [(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} \\ & + j(\lambda h)^2 \bar{q} + j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] \sin |\lambda| y \\ & + [(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} + j \mathfrak{E}^2 \bar{q} + j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] |\lambda| y \cos |\lambda| y \\ & + [-\mathfrak{E}^2 \bar{p} + |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} + j(\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} - j(\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] |\lambda| y \sin |\lambda| y \} \quad \dots (21), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\lambda, y) = \frac{-1}{\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2} \{ & [j(\lambda h)^2 \bar{p} - j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} + (\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} - (\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] \\ & \times \sin |\lambda| y + (\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2) \bar{q} \cos |\lambda| y \\ & + [-j(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} + j(\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} + \mathfrak{E}^2 \bar{q} + |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] |\lambda| y \sin |\lambda| y \\ & + [j \mathfrak{E}^2 \bar{p} - j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} + (\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - (\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] |\lambda| y \cos |\lambda| y \} \quad \dots (22), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\lambda, y) = \frac{-1}{\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2} \{ & [(\mathfrak{E}^2 + (\lambda h)^2) \bar{p} - 2|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} - 2j(\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} \\ & + 2j(\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] \cos |\lambda| y \\ & + [-(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} + (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} + j((\lambda h)^2 - 2\mathfrak{E}^2) \bar{q} - j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] \sin |\lambda| y \\ & + [-(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} + (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} - j \mathfrak{E}^2 \bar{q} - j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] |\lambda| y \cos |\lambda| y \\ & + [\mathfrak{E}^2 \bar{p} - |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} - j(\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} + j(\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] |\lambda| y \sin |\lambda| y \} \quad \dots (23), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cdot \lambda \cdot \bar{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2} \{ & [-j \langle (1 - \nu - 2\nu^2) \mathfrak{E}^2 + (1 + \nu) (\lambda h)^2 \rangle \bar{p} + 2j(1 - \nu^2) |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} \\ & - 2(1 - \nu^2) (\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} + 2(1 - \nu^2) (\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] \cos |\lambda| y \\ & + [j(1 - \nu - 2\nu^2) (\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - j(1 - \nu - 2\nu^2) (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} \\ & + \langle (1 + \nu) (\lambda h)^2 - 2(1 - \nu^2) \mathfrak{E}^2 \rangle \bar{q} - (1 - \nu - 2\nu^2) |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] \sin |\lambda| y \\ & + [j(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - j(\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} - \mathfrak{E}^2 \bar{q} - |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] (1 + \nu) |\lambda| y \cos |\lambda| y \\ & + [-j \mathfrak{E}^2 \bar{p} + j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} - (\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} + (\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] (1 + \nu) |\lambda| y \sin |\lambda| y \} \quad (24), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cdot \lambda \cdot \bar{v}(\lambda, y) = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 - (\lambda h)^2} \{ & [2(1 - \nu^2) (\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} - 2(1 - \nu^2) (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} \\ & + j \langle (1 - \nu - 2\nu^2) \mathfrak{E}^2 + (1 + \nu) (\lambda h)^2 \rangle \bar{q} + 2j(1 - \nu^2) |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] \cos |\lambda| y \\ & + [\langle (1 + \nu) (\lambda h)^2 - 2(1 - \nu^2) \mathfrak{E}^2 \rangle \bar{p} + (1 - \nu - 2\nu^2) |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} \\ & + j(1 - \nu - 2\nu^2) (\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} - j(1 - \nu - 2\nu^2) (\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] \sin |\lambda| y \\ & + [\mathfrak{E}^2 \bar{p} - |\lambda| h \mathfrak{E} \bar{p} - j(\lambda| h - \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{q} + j(\lambda| h \mathfrak{E} - \mathfrak{E}) \bar{q}] (1 + \nu) |\lambda| y \cos |\lambda| y \\ & + [-(\lambda| h + \mathfrak{E} \mathfrak{E}) \bar{p} + (\lambda| h \mathfrak{E} + \mathfrak{E}) \bar{p} - j \mathfrak{E}^2 \bar{q} - j|\lambda| h \mathfrak{E} \bar{q}] (1 + \nu) |\lambda| y \sin |\lambda| y \} \quad (25). \end{aligned}$$

Die beiden letzten Formeln gelten für den ebenen Formänderungszustand. Mit $\nu^2 = 0$ gehen sie nach dem eingangs Gesagten sofort in die für den ebenen Spannungszustand maßgebenden Ausdrücke über.

Den Gl. (21) bis (25) liegt die Transformation (6) zugrunde, die bei nicht-periodischer Belastung am Platze ist; liegt eine periodische Belastung vor, so wird man die Transformation (6') anwenden, welche ebenfalls zu den Formeln (21) bis (25) führt, sofern man dort die kontinuierliche

Veränderliche λ durch die diskrete Veränderliche $\frac{\pi n}{l}$ ersetzt.

Die transformierten Randbelastungen \bar{p} , \bar{q} , \bar{p} , \bar{q} , müssen aus den gegebenen Funktionen p , q , \dot{p} , \dot{q} gemäß (5*) bzw. (2*) errechnet werden:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p}(\lambda) \\ \bar{q}(\lambda) \\ \bar{\dot{p}}(\lambda) \\ \bar{\dot{q}}(\lambda) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} p(x) \\ q(x) \\ \dot{p}(x) \\ \dot{q}(x) \end{array} \right\} e^{i\lambda x} dx \dots \dots \dots (26)$$

(bei nicht-periodischer Randbelastung)

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \\ \bar{q}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \\ \bar{\dot{p}}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \\ \bar{\dot{q}}\left(\frac{\pi n}{l}\right) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \int_{-l}^{+l} \left\{ \begin{array}{l} p(x) \\ q(x) \\ \dot{p}(x) \\ \dot{q}(x) \end{array} \right\} e^{i\frac{\pi n}{l}x} dx \dots \dots \dots (26')$$

(bei periodischer Randbelastung)

Durch Rücktransformation gemäß (5) bzw. (5') erhält man

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau(x, y) \\ u(x, y) \\ v(x, y) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_x(\lambda, y) \\ \bar{\sigma}_y(\lambda, y) \\ \bar{\tau}(\lambda, y) \\ \bar{u}(\lambda, y) \\ \bar{v}(\lambda, y) \end{array} \right\} e^{-i\lambda x} d\lambda \dots \dots \dots (27)$$

(bei nicht-periodischer Randbelastung)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau(x, y) \\ u(x, y) \\ v(x, y) \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_x\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \\ \bar{\sigma}_y\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \\ \bar{\tau}\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \\ \bar{u}\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \\ \bar{v}\left(\frac{\pi n}{l}, y\right) \end{array} \right\} e^{-i\frac{\pi n}{l}x} \dots \dots \dots (27')$$

(bei periodischer Randbelastung; hier ist in (21) bis (25) $\lambda = \frac{\pi n}{l}$ zu setzen.)

Damit ist der Spannungs- und Verformungszustand des Streifens bei gegebener normaler und tangentialer Randbelastung allgemein bestimmt.

Bevor wir uns der geschichteten Scheibe zuwenden, wollen wir noch die Spannungskomponenten der homogenen Halbscheibe aus der Lösung für den Streifen ableiten. Führt man in (21), (22), (23) die Koordinate η gemäß $y = h - \eta$ ein (vgl. Bild 2) und geht dann zur Grenze $h \rightarrow \infty$ über (Bild 3), so erhält man für die Halbscheibe

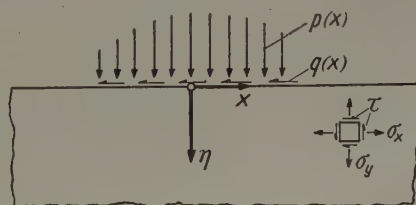


Bild 3. Die Halbscheibe bei normaler und tangentialer Randbelastung

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_y(\lambda, \eta) = - [(1 + |\lambda| \eta) \bar{p}(\lambda) - j |\lambda| \eta \bar{q}(\lambda)] e^{-|\lambda| \eta}, \\ \bar{\tau}(\lambda, \eta) = - [-j |\lambda| \eta \bar{p}(\lambda) + (1 - |\lambda| \eta) \bar{q}(\lambda)] e^{-|\lambda| \eta}, \\ \bar{\sigma}_x(\lambda, \eta) = - [(1 - |\lambda| \eta) \bar{p}(\lambda) - j (2 - |\lambda| \eta) \bar{q}(\lambda)] e^{-|\lambda| \eta} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Nach Rücktransformation gemäß (27) kommt bei Beachtung von $j = \frac{i\lambda}{|\lambda|}$ als allgemeine Lösung (für nicht-periodische Belastung)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(x, \eta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 + |\lambda|\eta) \bar{p}(\lambda) - i\lambda\eta \bar{q}(\lambda)] e^{-|\lambda|\eta - i\lambda x} d\lambda, \\ \tau(x, \eta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [-i\lambda\eta \bar{p}(\lambda) + (1 - |\lambda|\eta) \bar{q}(\lambda)] e^{-|\lambda|\eta - i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, \eta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 - |\lambda|\eta) \bar{p}(\lambda) - \frac{i\lambda}{|\lambda|} (2 - |\lambda|\eta) \bar{q}(\lambda) \right] e^{-|\lambda|\eta - i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (28').$$

Für im Intervall $-a \leq x \leq a$ gleichmäßig verteilte Randspannungen p_0 und q_0 folgt nach (26)

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}(\lambda) &= \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-a}^{+a} e^{i\lambda x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_0 \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda}, \\ \bar{q}(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} q_0 \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (29).$$

Geht man schließlich zu einer Schneidenlast mit den Komponenten $P_0 = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ p_0 \rightarrow \infty}} [p_0 \cdot 2a]$ und $Q_0 = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ p_0 \rightarrow \infty}} [q_0 \cdot 2a]$ über⁸⁾, dann erhält man nach Ausführung des Grenzübergangs $a \rightarrow 0$

$$\bar{p} = \frac{P_0}{\sqrt{2\pi}}; \quad \bar{q} = \frac{Q_0}{\sqrt{2\pi}} \quad (30).$$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in (28') ein und bekommen bei Beachtung von (6'*) und Verwendung der Integrale

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|\eta} \cos \lambda x d\lambda &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda x d\lambda = \frac{2\eta}{x^2 + \eta^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| e^{-|\lambda|\eta} \cos \lambda x d\lambda &= 2 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\eta} \cos \lambda x d\lambda = 2 \frac{\eta^2 - x^2}{(x^2 + \eta^2)^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{|\lambda|} e^{-|\lambda|\eta} \sin \lambda x d\lambda &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda\eta} \sin \lambda x d\lambda = \frac{2x}{x^2 + \eta^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-|\lambda|\eta} \sin \lambda x d\lambda &= 2 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\eta} \sin \lambda x d\lambda = 4 \frac{x\eta}{(x^2 + \eta^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

die bekannten Formeln

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(x, \eta) &= -\frac{2}{\pi} P_0 \cdot \frac{\eta^3}{(x^2 + \eta^2)^2} + \frac{2}{\pi} Q_0 \cdot \frac{x\eta^2}{(x^2 + \eta^2)^2}, \\ \tau(x, \eta) &= \frac{2}{\pi} P_0 \cdot \frac{x\eta^2}{(x^2 + \eta^2)^2} - \frac{2}{\pi} Q_0 \cdot \frac{x^2\eta}{(x^2 + \eta^2)^2}, \\ \sigma_x(x, \eta) &= -\frac{2}{\pi} P_0 \cdot \frac{x^2\eta}{(x^2 + \eta^2)^2} + \frac{2}{\pi} Q_0 \cdot \frac{x^3}{(x^2 + \eta^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (32).$$

⁸⁾ P_0 bzw. Q_0 ist die im Koordinatenursprung angreifende Normal- bzw. Tangentialkraft je Scheibendicke.

4. Die geschichtete Scheibe im Falle vollkommener Haftung

Wir betrachten jetzt einen aus N einzelnen Streifen bestehenden Körper gemäß Bild 4 und setzen voraus, daß keine Relativverschiebung der Schichten längs der Berührungsflächen möglich ist. Dieses trifft sicher dann zu, wenn die Schichten zusammengeklebt sind. Falls sie frei aufeinanderliegen, soll der jeweilige Haftreibungskoeffizient so groß sein, daß keine tangentielle Verschiebung eintreten kann; ferner soll in diesem Fall eine geeignete äußere Lastverteilung das gegenseitige Abheben der Schichten verhindern. Die Schichthöhen h_1, h_2, \dots, h_N seien beliebig groß, ebenfalls die entsprechenden Elastizitätsmoduln E_1, E_2, \dots, E_N und Querdehnzahlen $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$. Vorgegeben seien die Randlasten, nämlich $p_0(x)$ und $q_0(x)$ an der oberen und $p_N(x)$ und $q_N(x)$ an der unteren Begrenzung (s. Bild 4). Gesucht sind zunächst die zwischen den einzelnen Schichten übertragenen Normal- und Schubspannungen $p_1(x), q_1(x), p_2(x), q_2(x), \dots, p_{N-1}(x), q_{N-1}(x)$. Die Vorzeichen von p und q sind dabei durch Bild 2 festgelegt.

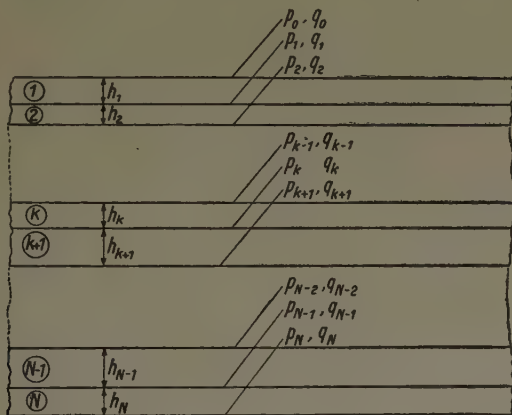
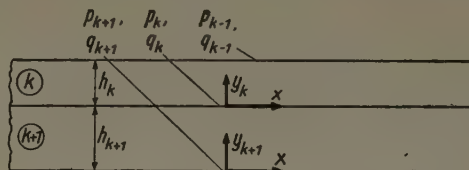
Bild 4. Die aus N Streifen zusammengesetzte Scheibe

Bild 5. Zur Herleitung der Berühr- und Haftbedingung

Zur Herleitung der Berühr- und Haftbedingung betrachten wir den k -ten und $(k+1)$ -ten Streifen (Bild 5). Die Bedingung dafür, daß sich diese beiden Streifen nicht voneinander abheben, lautet offenbar:

$$v_k(x, 0) = v_{k+1}(x, h_{k+1}) \quad (\text{Berührbedingung}).$$

Soll ferner keine tangentielle Verschiebung der Berührungsflächen auftreten, so muß außerdem die Bedingung

$$u_k(x, 0) = u_{k+1}(x, h_{k+1}) \quad (\text{Haftbedingung})$$

erfüllt sein. Wir gehen jetzt zu den transformierten Größen gemäß (6) über und erhalten⁹⁾

$$\bar{v}_k(\lambda, 0) = \bar{v}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) \quad (\text{Berührbedingung}) \quad \dots \quad (33),$$

$$\bar{u}_k(\lambda, 0) = \bar{u}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) \quad (\text{Haftbedingung}) \quad \dots \quad (34).$$

Für die in (33) und (34) benötigten Verschiebungen ergibt sich nach (24) und (25), wenn man dort $\bar{p}, \bar{p}', \bar{q}, \bar{q}'$ durch die entsprechenden Ausdrücke $\bar{p}_{k-1}, \bar{p}_k, \bar{p}_{k+1}, \bar{q}_{k-1}, \bar{q}_k, \bar{q}_{k+1}$ ersetzt:

$$\bar{u}_k(\lambda, 0) = \frac{2(1-\nu_k^2)}{\lambda \cdot E_k \cdot \varepsilon_k} \cdot \{-j\gamma_k \bar{p}_k + j\delta_k \bar{p}_{k-1} - \alpha_k^* \bar{q}_k + \beta_k^* \bar{q}_{k-1}\} \quad \dots \quad (35),$$

$$\bar{v}_k(\lambda, 0) = \frac{2(1-\nu_k^2)}{\lambda \cdot E_k \cdot \varepsilon_k} \cdot \{\alpha_k \bar{p}_k - \beta_k \bar{p}_{k-1} + j\gamma_k \bar{q}_k + j\delta_k \bar{q}_{k-1}\} \quad \dots \quad (36),$$

$$\bar{u}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) = \frac{2(1-\nu_{k+1}^2)}{\lambda \cdot E_{k+1} \cdot \varepsilon_{k+1}} \cdot \{j\delta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - j\gamma_{k+1} \bar{p}_k - \beta_{k+1}^* \bar{q}_{k+1} + \alpha_{k+1}^* \bar{q}_k\} \quad (37),$$

$$\bar{v}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) = \frac{2(1-\nu_{k+1}^2)}{\lambda \cdot E_{k+1} \cdot \varepsilon_{k+1}} \cdot \{\beta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - \alpha_{k+1} \bar{p}_k + j\delta_{k+1} \bar{q}_{k+1} + j\gamma_{k+1} \bar{q}_k\} \quad (38).$$

⁹⁾ Die Transformation (6) ist bei nicht-periodischer Belastung, die Transformation (6') bei periodischer Belastung anzuwenden. Im zweiten Fall braucht λ lediglich durch $\pi n/l$ ersetzt zu werden, so daß sich eine gesonderte Behandlung dieses Falles erübrigt.

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \alpha_k(\lambda) = |\lambda| h_k + \sin |\lambda| h_k \cdot \cos |\lambda| h_k, \\
 \alpha_k^* &= \alpha_k^*(\lambda) = |\lambda| h_k - \sin |\lambda| h_k \cdot \cos |\lambda| h_k, \\
 \beta_k &= \beta_k(\lambda) = |\lambda| h_k \cdot \cos |\lambda| h_k + \sin |\lambda| h_k, \\
 \beta_k^* &= \beta_k^*(\lambda) = |\lambda| h_k \cdot \cos |\lambda| h_k - \sin |\lambda| h_k, \\
 \delta_k &= \delta_k(\lambda) = |\lambda| h_k \cdot \sin |\lambda| h_k, \\
 \varepsilon_k &= \varepsilon_k(\lambda) = \sin^2 \lambda h_k - (\lambda h_k)^2, \\
 2\gamma_k &= \begin{cases} \frac{(1 - \nu_k - 2\nu_k^2) \sin^2 \lambda h_k + (1 + \nu_k) (\lambda h_k)^2}{1 - \nu_k^2} & \text{beim eb. Formänd. Zustand} \\ (1 - \nu_k) \sin \lambda h_k + (1 + \nu_k) (\lambda h_k)^2 & \text{beim eb. Spannungszust.} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (39).$$

Mit (35) bis (38) gehen die Berühr- und die Haftbedingung über in

$$\begin{aligned}
 \beta_{k+1} \cdot \bar{p}_{k+1} - (\alpha_{k+1} + \alpha_k \cdot \varphi_{k,k+1}) \cdot \bar{p}_k + \beta_k \cdot \varphi_{k,k+1} \cdot \bar{p}_{k-1} \\
 + j \delta_{k+1} \cdot \bar{q}_{k+1} + j (\gamma_{k+1} - \gamma_k \cdot \varphi_{k,k+1}) \cdot \bar{q}_k - j \delta_k \cdot \varphi_{k,k+1} \cdot \bar{q}_{k-1} = 0 \quad \dots (40),
 \end{aligned}$$

(Berührbedingung)

$$\begin{aligned}
 \delta_{k+1} \cdot \bar{p}_{k+1} - (\gamma_{k+1} - \gamma_k \cdot \varphi_{k,k+1}) \cdot \bar{p}_k - \delta_k \cdot \varphi_{k,k+1} \cdot \bar{p}_{k-1} \\
 + j \beta_{k+1}^* \cdot \bar{q}_{k+1} - j (\alpha_{k+1}^* + \alpha_k^* \cdot \varphi_{k,k+1}) \cdot \bar{q}_k + j \beta_k^* \cdot \varphi_{k,k+1} \cdot \bar{q}_{k-1} = 0 \quad \dots (41).
 \end{aligned}$$

(Haftbedingung)

In vorstehenden Formeln bedeutet

$$\varphi_{k,k+1} = \begin{cases} \frac{1 - \nu_k^2}{1 - \nu_{k+1}^2} \cdot \frac{E_{k+1}}{E_k} \cdot \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} & \text{beim eb. Formänd. Zust.} \\ \frac{E_{k+1}}{E_k} \cdot \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} & \text{beim eb. Spannungszust.} \end{cases} \quad \dots (42).$$

Die Gln. (40) und (41) sind zwei gekoppelte, lineare und homogene Differenzgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $\bar{p}_k(\lambda)$ und $\bar{q}_k(\lambda)$. Bei N Schichten sind $2(N-1)$ dieser Funktionen, nämlich $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}; \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{N-1}$ zu bestimmen (\bar{p}_0, \bar{q}_0 und \bar{p}_N, \bar{q}_N seien durch die Randbedingungen festgelegt). Dazu stehen uns die Gln. (40) und (41) zur Verfügung, welche $(N-1)$ mal angeschrieben werden können (nämlich für $k = 1, 2, \dots, N-1$) und somit genau die erforderlichen $2(N-1)$ Gleichungen liefern. Damit ist das Problem im Prinzip gelöst; um die Spannungs- und Verschiebungskomponenten an einer beliebigen Stelle der k -ten Schicht zu ermitteln, hat man wie folgt vorzugehen:

1. Aus den gegebenen Randbelastungen $p_0(x), q_0(x), p_N(x), q_N(x)$ sind die transformierten Belastungen $\bar{p}_0(\lambda), \bar{q}_0(\lambda), \bar{p}_N(\lambda), \bar{q}_N(\lambda)$ zu berechnen, und zwar bei periodischer Belastung nach (26') ($\lambda = \pi n/l$) und bei nicht-periodischer Belastung nach (26).

2. Die $2(N-1)$ Gleichungen (40) und (41) (für $k = 1, 2, \dots, N-1$) sind unter Berücksichtigung der Randbedingungen nach den $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}; \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{N-1}$ aufzulösen (im periodischen Fall ist dort $\lambda = \pi n/l$ zu setzen).

3. Nach Einsetzen von $\bar{p}_k, \bar{q}_k, \bar{p}_{k-1}, \bar{q}_{k-1}$ in (21) bis (25) erhält man die transformierten Spannungs- und Verschiebungsgrößen $\sigma_x, \sigma_y, \tau, u, v$ der k -ten Schicht (wobei man im periodischen Fall $\lambda = \pi n/l$ zu schreiben hat).

4. Durch Rücktransformation gemäß (27') (im periodischen Fall) bzw. (27) (im nicht-periodischen Fall) gewinnt man die Formeln für die Spannungen σ_x, σ_y, τ und für die Verschiebungen u, v an einer beliebigen Stelle der k -ten Schicht in Summen- bzw. Integraldarstellung.

Falls am oberen und unteren Rand der geschichteten Scheibe statt der Spannungen die Verschiebungen (zweites Randwertproblem) oder teils Spannungen, teils Verschiebungen (gemischtes Randwertproblem; die Spannungen oder Verschiebungen sollen jedoch hier jeweils im gesamten Bereich $-\infty < x < \infty$ gegeben sein) vorgegeben sind, hat man in dem für die erste Schicht ($k = 1$) und die letzte Schicht ($k = N$) geltenden Bedingungsgleichungen (40), (41) die Transformierten der Randspannungen $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{p}_N, \bar{q}_N$ ganz oder teilweise durch die Transformierten der Randverschiebungen $\bar{u}_1(\lambda, h_1) = \bar{u}_0(\lambda), \bar{v}_1(\lambda, h_1) = \bar{v}_0(\lambda)$ und $\bar{u}_N(\lambda, 0) = \bar{u}_N(\lambda), \bar{v}_N(\lambda, 0) = \bar{v}_N(\lambda)$ auszudrücken. Dies geschieht für die erste Schicht mittels der für $k = 0$ angeschriebenen Gln. (37), (38), für die letzte Schicht mittels der für $k = N$ angeschriebenen Gln. (35), (36). Ist beispielsweise

am oberen Rand die Verschiebung $v_0(x)$ vorgegeben, während dort keine Schubspannung auftreten soll ($q_0 = 0$), so folgt aus (38) mit $k = 0$ und $\bar{v}_1(\lambda, h_1) = \bar{v}_0(\lambda)$ sowie $\bar{q}_0 = 0$

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \left\{ -\frac{E_1 \varepsilon_1}{2(1-\nu_1^2)} \lambda \bar{v}_0 + \beta_1 \bar{p}_1 + j \delta_1 \bar{q}_1 \right\}.$$

Damit lauten die Bedingungen (40), (41) für $k = 1$

$$\beta_2 \bar{p}_2 - \left(\alpha_2 + \alpha_1 \varphi_{1,2} - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} \varphi_{1,2} \right) \bar{p}_1 + j \delta_2 \bar{q}_2 + j \left(\gamma_2 - \gamma_1 \varphi_{1,2} + \frac{\beta_1 \delta_1}{\alpha_1} \varphi_{1,2} \right) \bar{q}_1 - \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{\alpha_1} \cdot \varphi_{1,2} \cdot \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)} \cdot \lambda \bar{v}_0 = 0; \quad (40);$$

$$\delta_2 \bar{p}_2 - \left(\gamma_2 - \gamma_1 \varphi_{1,2} + \frac{\beta_1 \delta_1}{\alpha_1} \varphi_{1,2} \right) \bar{p}_1 + j \beta_2^* \bar{q}_2 - j \left(\alpha_2^* + \alpha_1^* \cdot \varphi_{1,2} - \frac{\delta_1^2}{\alpha_1} \varphi_{1,2} \right) \bar{q}_1 + \frac{\delta_1 \varepsilon_1}{\alpha_1} \cdot \varphi_{1,2} \cdot \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)} \cdot \lambda \bar{v}_0 = 0 \quad (41).$$

Wir betrachten im folgenden einige Spezialfälle.

4.1. Die homogene Halbscheibe

Die Halbscheibe bestehe aus lauter gleichen, aneinandergeklebten Streifen. Die Lösung der Differenzgleichungen (40), (41) muß dann auf die bekannten Formeln der Halbscheibe führen. Dieses wollen wir im folgenden nachweisen.

Wegen der Gleichheit der Schichten wird nach (42) $\varphi_{k,k+1} = 1$; außerdem ergibt sich nach (39) $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha$; $\beta_k = \beta_{k+1} = \beta$; $\delta_k = \delta_{k+1} = \delta$; $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \gamma$; $\alpha_k^* = \alpha_{k+1}^* = \alpha^*$; $\beta_k^* = \beta_{k+1}^* = \beta^*$. Die beiden Differenzgleichungen (40), (41) erhalten mithin konstante Koeffizienten:

$$\beta \bar{p}_{k+1} - 2 \alpha \bar{p}_k + \beta \bar{p}_{k-1} + j \delta \bar{q}_{k+1} - j \delta \bar{q}_{k-1} = 0 \quad (43)$$

$$\delta \bar{p}_{k+1} - \delta \bar{p}_{k-1} + j \beta^* \bar{q}_{k+1} - 2 j \alpha^* \bar{q}_k + j \beta^* \bar{q}_{k-1} = 0 \quad (44).$$

Zur Lösung verwenden wir die Ansätze

$$\bar{p}_k = A \cdot e^{k\varrho}; \quad j \bar{q}_k = B \cdot e^{k\varrho},$$

welche folgende zwei lineare, homogene Gleichungen für die „Konstanten“ A und B ergeben¹⁰⁾:

$$A \cdot (\beta \cdot e^{2\varrho} - 2 \alpha e^\varrho + \beta) + B \cdot \delta (e^{2\varrho} - 1) = 0$$

$$A \cdot \delta (e^{2\varrho} - 1) + B (\beta^* e^{2\varrho} - 2 \alpha^* e^\varrho + \beta^*) = 0.$$

Eine nichttriviale Lösung existiert nur dann, wenn die von den Koeffizienten gebildete Determinante verschwindet. Diese Bedingung liefert die charakteristische Gleichung für ϱ und lautet mit $e^\varrho = z$:

$$(\beta \beta^* - \delta^2) z^4 - 2(\alpha \beta^* + \beta \alpha^*) z^3 + 2(\beta \beta^* + 2 \alpha \alpha^* + \delta^2) z^2 - 2(\alpha \beta^* + \beta \alpha^*) z + \beta \beta^* - \delta^2 = 0.$$

Setzt man jetzt die entsprechenden Ausdrücke nach (39) ein, so folgt nach kurzer Umformung

$$(z^2 - 2 \mathfrak{Cof} |\lambda| h \cdot z + 1)^2 = 0$$

mit den Wurzeln $z_1 = z_2 = e^{|\lambda| h}$; $z_3 = z_4 = e^{-|\lambda| h}$, (entsprechend $\varrho_1 = \varrho_2 = |\lambda| h$; $\varrho_3 = \varrho_4 = -|\lambda| h$).

Damit haben wir die Lösungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_k(\lambda) &= A_1(\lambda) \cdot e^{|\lambda| h k} + A_2(\lambda) \cdot |\lambda| h k \cdot e^{|\lambda| h k} + A_3(\lambda) \cdot e^{-|\lambda| h k} + A_4(\lambda) \cdot |\lambda| h k \cdot e^{-|\lambda| h k}, \\ j \bar{q}_k(\lambda) &= B_1(\lambda) \cdot e^{|\lambda| h k} + B_2(\lambda) \cdot |\lambda| h k \cdot e^{|\lambda| h k} + B_3(\lambda) \cdot e^{-|\lambda| h k} + B_4(\lambda) \cdot |\lambda| h k \cdot e^{-|\lambda| h k}. \end{aligned} \right\} \quad (45).$$

Um den Zusammenhang zwischen den B und den A zu finden, setzen wir (45) in (43) ein und nehmen einen Koeffizientenvergleich vor:

$$(\beta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k - \alpha) \cdot A_1 + |\lambda| h \beta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot A_2 + \delta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot B_1 + |\lambda| h \delta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k \cdot B_2 = 0,$$

$$(\beta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k - \alpha) \cdot A_2 + \delta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot B_2 = 0,$$

$$(\beta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k - \alpha) \cdot A_3 - |\lambda| h \beta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot A_4 - \delta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot B_3 + |\lambda| h \delta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k \cdot B_4 = 0,$$

$$(\beta \mathfrak{Cof} |\lambda| h k - \alpha) \cdot A_4 - \delta \mathfrak{Sin} |\lambda| h k \cdot B_4 = 0.$$

¹⁰⁾ Die Bezeichnung „Konstanten“ soll andeuten, daß diese Größen unabhängig von k sind, während sie im allgemeinen von λ abhängen.

Mit Berücksichtigung von (39) erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -(A_1 + A_2); & B_3 &= A_3 - A_4; \\ B_2 &= -A_2; & B_4 &= A_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46).$$

Die „Konstanten“ A_1, A_2, A_3, A_4 werden durch die Randbedingungen festgelegt. Da für $k \rightarrow \infty$ die Spannungen verschwinden müssen, folgt aus (45) $A_1 = A_2 = 0$. Für $k = 0$ kommt dann aus (45) mit (46)

$$\bar{p}_0(\lambda) = A_3 \quad \text{und} \quad j \bar{q}_0(\lambda) = A_3 - A_4.$$

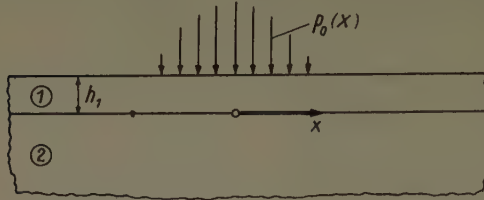


Bild 6. Die Halbscheibe mit aufgeklebtem Streifen bei normaler Belastung

Bei vorgegebenen Randspannungen (erstes Randwertproblem) sind $p_0(\lambda)$ und $q_0(\lambda)$ als bekannt zu betrachten; mithin ergibt sich für die „Konstanten“ A_3 und A_4

$$A_3 = \bar{p}_0(\lambda) \quad \text{und} \quad A_4 = \bar{p}_0(\lambda) - j \bar{q}_0(\lambda),$$

und wir erhalten aus (45)

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_k(\lambda) &= [(1 + |\lambda| h k) \bar{p}_0(\lambda) - j |\lambda| h k \bar{q}_0(\lambda)] \cdot e^{-|\lambda| h k} \\ \bar{q}_k(\lambda) &= [-j |\lambda| h k \bar{p}_0(\lambda) + (1 - |\lambda| h k) \bar{q}_0(\lambda)] \cdot e^{-|\lambda| h k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47).$$

Diese Ausdrücke sind identisch mit den in (28) für die homogene Halbscheibe direkt abgeleiteten Formeln, sofern man dort $\bar{\sigma}_y = -\bar{p}_k$, $\bar{\tau} = -\bar{q}_k$ und $\eta = h k$ setzt, was nachzuweisen war.

4.2. Die Halbscheibe mit aufgeklebtem Streifen

Wir betrachten den aus einem Streifen (Index 1) und aus einer Halbscheibe (Index 2) bestehenden Verbundkörper gemäß Bild 6 und setzen der Einfachheit halber einen ebenen Spannungszustand voraus. Es sei eine beliebige Normalbelastung $p_0(x)$ des Randes vorgegeben (von einer tangentialen Randbelastung wollen wir hier absehen).

Mit $h_2 \rightarrow \infty$ erhält man aus (39) für die Halbscheibe

$$\alpha_2 = -\alpha_2^* = \varepsilon_2 = \frac{e^{2|\lambda| h_2}}{4} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty}; \quad \beta_2 = \beta_2^* = \delta_2 = |\lambda| h_2 \cdot \frac{e^{|\lambda| h_2}}{2} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty};$$

$$\gamma_2 = (1 - \nu_2) \cdot \frac{e^{2|\lambda| h_2}}{8} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty} \quad (\text{beim ebenen Spannungszustand}).$$

Nach (42) wird dann

$$\varphi_{1,2} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{e^{2|\lambda| h_2}}{4 \varepsilon_1} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty} \quad (\text{beim ebenen Spannungszustand}).$$

Setzt man diese Ausdrücke in die für $k = 1$ angeschriebenen Differenzengleichungen (40) und (41) ein und geht dann zur Grenze $h_2 \rightarrow \infty$ über, so ergibt sich wegen $\bar{q}_0 = 0$ (da keine Tangentialbelastung des Randes vorhanden sein soll)

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \right) \cdot \bar{p}_1 + j \left(-\frac{1 - \nu_2}{2} + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} \right) \cdot \bar{q}_1 = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\beta_1}{\varepsilon_1} \cdot \bar{p}_0,$$

$$\left(-\frac{1 - \nu_2}{2} + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} \right) \cdot \bar{p}_1 - j \left(-1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\alpha_1^*}{\varepsilon_1} \right) \cdot \bar{q}_1 = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{\delta_1}{\varepsilon_1} \cdot \bar{p}_0.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach \bar{p}_1 und \bar{q}_1 führt zu

$$\bar{p}_1(\lambda) = \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{\beta_1 \cdot \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \alpha_1^* \right) + \delta_1 \cdot \left(\frac{1 - \nu_2}{2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \gamma_1 \right)}{\left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 + \alpha_1 \right) \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \alpha_1^* \right) - \left(\frac{1 - \nu_2}{2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \gamma_1 \right)^2} \dots \dots \dots (48),$$

$$\bar{q}_1(\lambda) = -j \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{\beta_1 \cdot \left(\frac{1 - \nu_2}{2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \gamma_1 \right) + \delta_1 \cdot \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 + \alpha_1 \right)}{\left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 + \alpha_1 \right) \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \alpha_1^* \right) - \left(\frac{1 - \nu_2}{2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \varepsilon_1 - \gamma_1 \right)^2} \dots \dots \dots (49).$$

$\bar{p}_0(\lambda)$ ist auf Grund der vorgegebenen Randbelastung als bekannt anzusehen; die $\alpha_1, \alpha_1^*, \varepsilon_1$ und γ_1 können aus (39) entnommen werden. Durch Rücktransformation von (48) und (49) erhält man die zwischen dem Streifen und der Halbscheibe übertragenen Normal- und Schubspannungen.

Bestehen Streifen und Halbscheibe aus demselben Material, so vereinfachen sich (48) und (49) (der Nenner wird $(\sin |\lambda| h_1 + \cos |\lambda| h_1)^2 \cdot [\sin^2 \lambda h_1 - (\lambda h_1)^2]$) zu

$$\begin{aligned}\bar{p}_1(\lambda) &= \bar{p}_0(\lambda) \cdot (1 + |\lambda| h_1) \cdot e^{-|\lambda| h_1}, \\ \bar{q}_1(\lambda) &= -j \bar{p}_0(\lambda) \cdot |\lambda| h_1 \cdot e^{-|\lambda| h_1}.\end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen — wie es auch sein muß — mit jenen der homogenen Halbscheibe überein. Davon kann man sich durch einen Vergleich mit (28) oder (47) überzeugen.

Wir wollen noch einen zweiten Spezialfall ins Auge fassen. Setzt man in (48) und (49) $E_2 \rightarrow \infty$ (was dem Fall eines elastischen Streifens auf starrer, rauher Unterlage entspricht), so folgt

$$\begin{aligned}\bar{p}_1(\lambda) &= \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{\beta_1 \alpha_1^* + \delta_1 \gamma_1}{\alpha_1 \alpha_1^* + \gamma_1^2}, \\ \bar{q}_1(\lambda) &= j \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{-\beta_1 \gamma_1 + \delta_1 \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_1^* + \gamma_1^2}.\end{aligned}$$

In Verbindung mit (39) erhält man daraus nach Division von Zähler und Nenner mit $[\sin^2 \lambda h_1 - (\lambda h_1)^2]$

$$\begin{aligned}\bar{p}_1(\lambda) &= 2 \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{2 \cos \lambda h_1 + (1 + \nu_1) \lambda h_1 \sin \lambda h_1}{4 \cos^2 \lambda h_1 - (1 - \nu_1)^2 \sin^2 \lambda h_1 + (1 + \nu_1)^2 (\lambda h_1)^2}, \\ \bar{q}_1(\lambda) &= 2 j \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{(1 - \nu_1) \sin \lambda h_1 - (1 + \nu_1) \lambda h_1 \cos \lambda h_1}{4 \cos^2 \lambda h_1 - (1 - \nu_1)^2 \sin^2 \lambda h_1 + (1 + \nu_1)^2 (\lambda h_1)^2}.\end{aligned}$$

Falls nur eine (normal zum Rand gerichtete) Einzelkraft P_0 bei $x = 0$ wirkt, gilt nach (30)

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot P_0,$$

und die Rücktransformation von \bar{p}_1 und \bar{q}_1 gemäß (6'*) liefert

$$p_1(x) = \frac{2}{\pi} \cdot P_0 \cdot \int_0^\infty \frac{2 \cos \lambda h_1 + (1 + \nu_1) \lambda h_1 \sin \lambda h_1}{4 \cos^2 \lambda h_1 - (1 - \nu_1)^2 \sin^2 \lambda h_1 + (1 + \nu_1)^2 (\lambda h_1)^2} \cos \lambda x \cdot d\lambda \quad (50),$$

$$q_1(x) = \frac{2}{\pi} \cdot P_0 \cdot \int_0^\infty \frac{(1 - \nu_1) \sin \lambda h_1 - (1 + \nu_1) \lambda h_1 \cos \lambda h_1}{4 \cos^2 \lambda h_1 - (1 - \nu_1)^2 \sin^2 \lambda h_1 + (1 + \nu_1)^2 (\lambda h_1)^2} \sin \lambda x \cdot d\lambda \quad (51).$$

Dieser Fall des elastischen Streifens auf starrer, rauher Unterlage unter Einzellast wurde früher schon von K. MARGUERRE¹¹⁾ behandelt. Seine Ergebnisse stimmen mit den Formeln (50) und (51) vollständig überein.

5. Die geschichtete Scheibe im Falle verschwindender Reibung

Wir legen unseren Überlegungen wieder einen aus N Schichten von beliebigen elastischen Eigenschaften bestehenden Körper zugrunde, wie ihn Bild 4 zeigt. Der Unterschied gegenüber dem unter der Ziff. 4 behandelten Fall liegt darin, daß keine Reibung zwischen den einzelnen Streifen auftreten soll. Mithin ist nur eine senkrecht auf die Schichten wirkende Belastung möglich. Diese soll so verteilt sein, daß sich die Streifen nicht gegenseitig voneinander abheben.

Die Bedingung für Reibungsfreiheit lautet

$$q_0 = q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0 \quad (52).$$

Sie ersetzt die Haftbedingung, die hier entfällt. Die Berührbedingung muß dagegen erfüllt werden. In Verbindung mit (52) reduziert sich die Berührbedingung (40) auf

$$\beta_{k+1} \cdot \bar{p}_{k+1} - (\alpha_{k+1} + \alpha_k \cdot \varphi_{k,k+1}) \cdot \bar{p}_k + \beta_k \cdot \varphi_{k,k+1} \cdot \bar{p}_{k-1} = 0 \quad (53).$$

Gl. (53) ist eine lineare und homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\bar{p}_k(\lambda)$. Da insgesamt N Streifen vorhanden sind, müssen $(N - 1)$ unbekannte Funktionen

¹¹⁾ K. MARGUERRE, Ing. Arch. 2 (1931), S. 108.

$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}$ bestimmt werden (\bar{p}_0 und \bar{p}_N seien durch die Randbedingungen festgelegt). Zu diesem Zweck steht uns die Differenzengleichung (53) zur Verfügung, welche, für $k = 1, 2, \dots, N - 1$ angeschrieben, gerade die erforderliche Zahl von $N - 1$ Gleichungen liefert, womit die Aufgabe im Prinzip gelöst ist. Hat man auf diese Weise z. B. \bar{p}_k und \bar{p}_{k-1} bestimmt, so erhält man aus (21) bis (25) die transformierten Spannungs- und Verschiebungsgrößen $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}, \bar{u}, \bar{v}$ der k -ten Schicht und nach Rücktransformation schließlich $\sigma_x, \sigma_y, \tau, u, v$.

Ist statt der Druckverteilung $p_0(x)$ die Verschiebung $v_0(x)$ vorgegeben, so gilt für $k = 1$ die Berührbedingung (40') mit $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$:

$$\beta_2 \cdot \bar{p}_2 - \left(\alpha_2 + \alpha_1 \varphi_{1,2} - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} \varphi_{1,2} \right) \cdot \bar{p}_1 - \frac{\beta_1 \varepsilon_1}{\alpha_1} \cdot \varphi_{1,2} \cdot \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)} \cdot \lambda \bar{v}_0 = 0 \quad \dots (53').$$

Wir wenden uns jetzt einigen Sonderfällen zu.

5.1. Die homogen-geschichtete Scheibe

Sämtliche Streifen sollen hier gleiche elastische Eigenschaften und gleiche Abmessungen (Höhen) besitzen. Dann gilt

$$\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha; \quad \beta_k = \beta_{k+1} = \beta; \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} = \varepsilon; \quad \varphi_{k,k+1} = 1$$

und (53) geht über in folgende Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\bar{p}_{k+1} - 2 \frac{\alpha}{\beta} \bar{p}_k + \bar{p}_{k-1} = 0 \quad \dots (54).$$

Der Lösungsansatz

$$\bar{p}_k = A \cdot e^{q \cdot k}$$

führt zu

$$e^{2q} - 2 \frac{\alpha}{\beta} e^q + 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$e^{q_{1,2}} = \frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1}$$

bzw.

$$q_1 = -q_2 = \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} \right).$$

Nach (39) ist aber

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda h + \operatorname{Sh} \lambda h \operatorname{Co} \lambda h}{\lambda h \operatorname{Co} \lambda h + \operatorname{Sh} \lambda h} \geq 1,$$

und somit ist $q_1 \geq 0$. Die allgemeine Lösung lautet nun mit $A_1(\lambda)$ und $A_2(\lambda)$ als an die Randbedingungen anzupassende „Konstanten“

$$\bar{p}_k(\lambda) = A_1(\lambda) \cdot e^{q_1 k} + A_2(\lambda) \cdot e^{-q_1 k},$$

oder, nach Einsetzen von q_1 und $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\bar{p}_k(\lambda) = A_1(\lambda) \cdot \psi^k(\lambda) + A_2(\lambda) \cdot \psi^{-k}(\lambda) \quad \dots (55),$$

wobei

$$\psi(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{Sh} \lambda h \cdot \operatorname{Co} \lambda h + \sqrt{\operatorname{Sh}^2 \lambda h - (\lambda h)^2} \cdot \operatorname{Sh} \lambda h}{\lambda h \cdot \operatorname{Co} \lambda h + \operatorname{Sh} \lambda h} \quad \dots (56)$$

bedeutet.

Mit $k = 0$ und $k = N$ lautet (55):

$$p_0 = A_1 + A_2; \quad \bar{p}_N = A_1 \cdot \psi^N + A_2 \cdot \psi^{-N};$$

dabei sind \bar{p}_0 und \bar{p}_N bei vorgegebener Randbelastung als bekannt anzusehen. Die Auflösung nach A_1 und A_2 ergibt

$$A_1 = \frac{\bar{p}_N - \psi^{-N} \cdot \bar{p}_0}{\psi^N - \psi^{-N}}; \quad A_2 = \frac{\psi^N \cdot \bar{p}_0 - \bar{p}_N}{\psi^N - \psi^{-N}};$$

und damit wird

$$\bar{p}_k(\lambda) = \frac{1}{\psi^N - \psi^{-N}} \cdot [(\bar{p}_N - \psi^{-N} \cdot \bar{p}_0) \cdot \psi^k + (\psi^N \cdot \bar{p}_0 - \bar{p}_N) \cdot \psi^{-k}] \quad \dots (57).$$

Der Übergang zur homogen-geschichteten unendlichen Halbscheibe ist schnell vollzogen. Setzt man nämlich in (57) $N \rightarrow \infty$, so folgt sofort

$$\bar{p}_k(\lambda) = \bar{p}_0(\lambda) \cdot \psi^{-k}(\lambda) \quad \dots \quad (58).$$

Wir geben jetzt noch die sich durch Einsetzen von ψ aus (56) und durch Rücktransformation gemäß (6*) ergebende Formel für die Druckverteilung zwischen der k -ten und der $(k+1)$ -ten Schicht an¹²⁾:

$$p_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_0(\lambda) \cdot \left[\frac{\lambda h + \mathfrak{E} \sin \lambda h \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\lambda h + \sqrt{\mathfrak{E} \sin^2 \lambda h - (\lambda h)^2} \cdot \mathfrak{E} \sin \lambda h \right]}{\lambda h \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\lambda h + \mathfrak{E} \sin \lambda h \right]} \right]^{-k} \cdot e^{-i\lambda x} \cdot d\lambda \quad (58').$$

Für eine Schneidenlast P_0 am Rand ist in bekannter Weise $\bar{p}_0 = P_0/\sqrt{2\pi}$ zu setzen; allerdings müssen wir in diesem Fall noch eine — wenn auch geringe — gleichmäßige Druckvorspannung überlagern, welche ein evtl. Abheben der Schichten voneinander verhindert.

Für $\lambda h \ll 1$ geht (56), wie man durch Reihenentwicklung nach Potenzen von λh zeigen kann, über in

$$\psi(\lambda) = 1 + \frac{(\lambda h)^2}{2\sqrt{3}} + \dots$$

und (58) wird in diesem Fall

$$\bar{p}_k(\lambda) \approx \bar{p}_0(\lambda) \cdot \left[1 + \frac{(\lambda h)^2}{2\sqrt{3}} \right]^{-k} \approx \bar{p}_0(\lambda) \cdot e^{-\frac{(\lambda h)^2}{2\sqrt{3}} \cdot k} \quad \dots \quad (59).$$

Diesen Ausdruck bekommt man übrigens auch aus der Differenzengleichung (54), geschrieben in der Form

$$\frac{\bar{p}_{k+1} - 2\bar{p}_k + \bar{p}_{k-1}}{h^2} - \frac{2}{h^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \cdot \bar{p}_k = 0,$$

wenn man zur Grenze $h \rightarrow 0$, d. h. zur Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \bar{p}}{d\eta^2} - \left[\frac{2}{h^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right]_{h \rightarrow 0} \cdot \bar{p} = 0$$

übergeht. Durch Reihenentwicklung nach Potenzen von λh wird $2 \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = \frac{(\lambda h)^4}{12} + \dots$,

und die Lösung der vorstehenden Differentialgleichung liefert bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\bar{p} = \bar{p}_0 \cdot e^{-\frac{(\lambda h)^4}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\eta}{h}}$$

und mit $\eta = h \cdot k$ sofort den Ausdruck (59).

5.1.1. Erstes Beispiel

Als Beispiel bestimmen wir im folgenden den Spannungszustand in der homogen-geschichteten Halbscheibe für die Belastung (vgl. Bild 7)

$$p_0(x) = p^* \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{l} x \right) \quad \dots \quad (60).$$

Nach (26') erhalten wir für die transformierte Belastung

$$\bar{p}_0 \left(\frac{\pi n}{l} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot p^* & \text{für } \begin{cases} n = \pm 1 \\ n = 0 \end{cases} \\ \sqrt{2l} \cdot p^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (60').$$

Damit wird (58)

$$\bar{p}_k \left(\frac{\pi n}{l} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot p^* \\ \sqrt{2l} \cdot p^* \\ 0 \end{cases} \cdot \psi^{-k} \left(\frac{\pi n}{l} \right) \quad \text{für } \begin{cases} n = \pm 1 \\ n = 0 \\ \text{sonst} \end{cases} \quad \dots \quad (61),$$

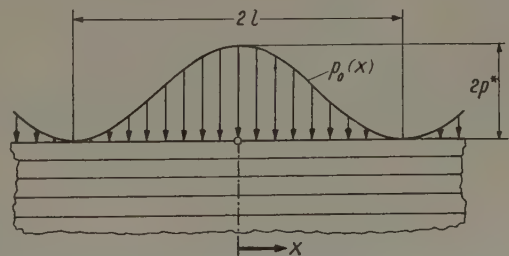


Bild 7. Die homogen-geschichtete Halbscheibe bei periodischer, normaler Belastung

¹²⁾ Bei periodischer Belastung ist natürlich mit $\lambda = \pi n/l$ die Transformation (3*) zu verwenden.

wobei nach (56) wegen $\lambda = \frac{\pi n}{l}$

$$\left. \begin{aligned} \psi\left(\pm \frac{\pi}{l}\right) &= \frac{\frac{\pi h}{l} + \sin \frac{\pi h}{l} \cdot \cos \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{\pi h}{l} \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{\pi h}{l} - \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2}}{\frac{\pi h}{l} \cdot \cos \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{\pi h}{l}} \\ \left(\psi\left(\pm \frac{\pi}{l}\right) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2 \quad \text{für } \frac{\pi h}{l} \ll 1\right), \\ \psi(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Die Rücktransformation von (61) gemäß (3'*) liefert

$$p_k(x) = p^* \cdot \left(1 + \psi^{-k} \left(\frac{\pi}{l}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{l} x\right) \quad (61').$$

Für relativ dünne Schichten (d. h. die Schichtdicke h soll im Vergleich zur Periodenlänge $2l$ sehr klein sein) erhält man mithin

$$p_k(x) = p^* \cdot \left\{1 + \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2\right]^{-k} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x\right\} \approx p^* \cdot \left\{1 + e^{-\left(\frac{\pi h}{l}\right)^2 \cdot \frac{k}{2\sqrt{3}}} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x\right\} \quad (61'').$$

Der rechtsstehende Ausdruck in (61'') ist identisch mit dem von G. SONNTAG¹³⁾ angegebenen, der durch eine sehr vereinfachte, speziell auf den Fall dünner Schichten bei periodischer Randbelastung zugeschnittenen Ableitung erhalten wurde.

Wir wenden uns nun der Bestimmung des Spannungszustandes in der k -ten Schicht zu und wollen der Einfachheit halber $\pi h/l \ll 1$ voraussetzen. Nimmt man in (21), (22), (23)

$$\bar{p} = \bar{p}_k; \quad \bar{p} = \bar{p}_{k-1} = \psi \cdot \bar{p}_k; \quad \bar{q} = \bar{q} = 0,$$

so folgen mit $\pi h/l \ll 1$

$$\bar{\sigma}_{yk} = -\bar{p}_k \cdot \left[1 + (\psi - 1) \left(\frac{y}{h}\right)^2 \left(3 - 2 \frac{y}{h}\right)\right] \quad (63),$$

$$\bar{\tau}_k = 6j \cdot \bar{p}_k \cdot \frac{1}{\pi h} \cdot (\psi - 1) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad \left(j = i \frac{n}{|n|}\right) \quad (64),$$

$$\bar{\sigma}_{xk} = 6\bar{p}_k \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi h}{l}\right)^2} \cdot (\psi - 1) \left(1 - 2 \frac{y}{h}\right) \quad (65)$$

und nach Rücktransformation entsprechend (3'*) und Einsetzen von ψ

$$\sigma_{yk}(x, y) = -\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2\right]^{-k} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{h}\right)^2 \cdot \left(3 - 2 \frac{y}{h}\right)\right] \cdot p^* \cdot \cos \frac{\pi}{l} x - p^* \quad (63'),$$

$$\tau_k(x, y) = \sqrt{3} \frac{\pi h}{l} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2\right]^{-k} \cdot \frac{y}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot p^* \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (64'),$$

$$\sigma_{xk}(x, y) = \sqrt{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2\right]^{-k} \cdot \left(1 - 2 \frac{y}{h}\right) \cdot p^* \cdot \cos \frac{\pi}{l} x \quad (65').$$

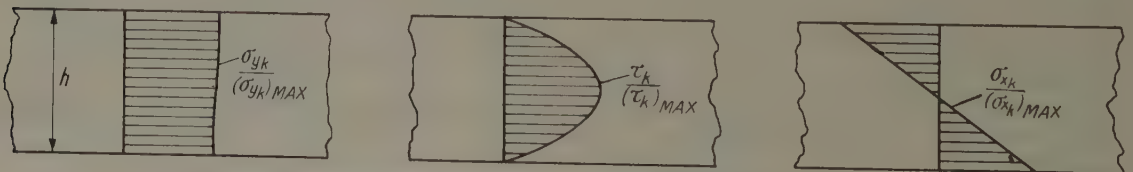


Bild 8. Verlauf der Spannungen über die Streifenhöhe in der homogen-geschichteten Halbscheibe mit $\pi h/l \ll 1$ (Belastung nach Bild 7)

Bild 8 zeigt den Verlauf von σ_{yk} , τ_k und σ_{xk} über die Streifenhöhe. Man erkennt, daß σ_{xk} eine reine Biegespannung ist; der Verlauf von τ_k entspricht ebenso der von der elementaren Balkentheorie

¹³⁾ G. SONNTAG, Forsch. Ing. Wes. 23 (1957), S. 3; dort werden die Schichten nach der elementaren Balkentheorie behandelt.

her bekannten parabolischen Schubspannungsverteilung. Falls die hier vorausgesetzte Bedingung $\pi h/l \ll 1$ nicht erfüllt ist, wird natürlich eine mehr oder weniger große Abweichung der Span-

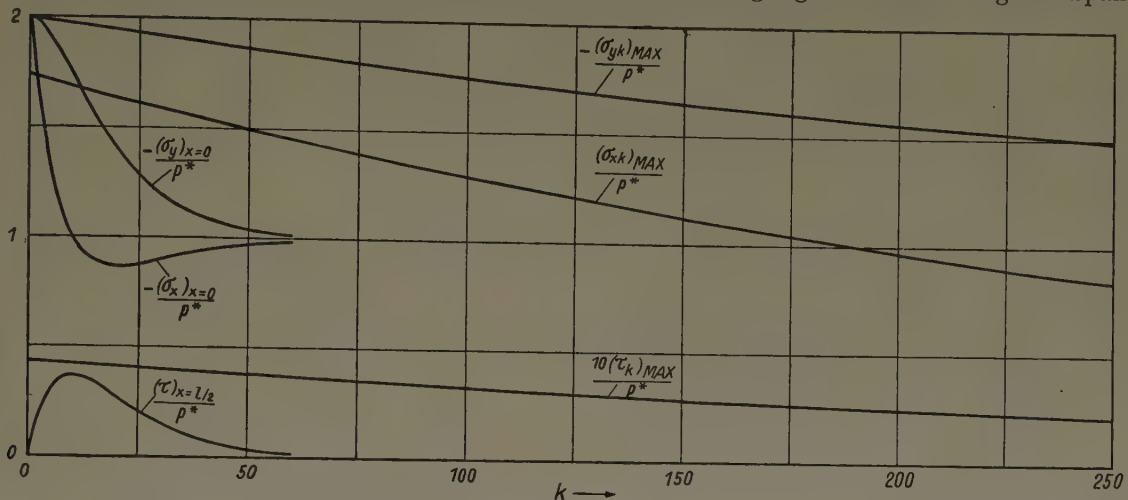


Bild 9. Verlauf der Spannungen in der homogen-geschichteten Halbscheibe und in der nicht-geschichteten Halbscheibe, aufgetragen über k (Belastung nach Bild 7; $\pi h/l = 1/10$)

nungen von den in Bild 8 gezeigten Kurven vorhanden sein. Von Interesse sind noch die maximalen Spannungen im k -ten Streifen, aufgetragen über k . Aus (63'), (64'), (65') folgt:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y)_k)_{MAX} &= - \left\{ 1 + \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2 \right]^{-k+1} \right\} \cdot p^*, \\ (\tau_k)_{MAX} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi h}{l} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2 \right]^{-k} \cdot p^*, \\ (\sigma_x)_k)_{MAX} &= \sqrt{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2 \right]^{-k} \cdot p^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66).$$

Zum Vergleich geben wir noch die leicht aus (28) ableitbaren Formeln für die Spannungen in der nicht-geschichteten Halbscheibe an.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y)_{x=0} &= - \left\{ 1 + \left(1 + \frac{\pi}{l} \eta \right) \cdot e^{-\frac{\pi}{l} \eta} \right\} \cdot p^*, \\ (\tau_x)_{x=l/2} &= \frac{\pi}{l} \cdot \eta \cdot e^{-\frac{\pi}{l} \eta} \cdot p^*, \\ (\sigma_x)_{x=0} &= - \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{l} \eta \right) \cdot e^{-\frac{\pi}{l} \eta} \right\} \cdot p^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67).$$

Bild 9 zeigt den nach (66) und (67) für $\pi h/l = 1/10$ errechneten Verlauf der Spannungen, aufgetragen über k (in (67) wurde dabei $\eta = kh$ gesetzt). Die für (66) zuständigen Kurven geben natürlich nur an den diskreten Stellen $k = 1, 2, 3, \dots$ die richtigen Spannungen (und zwar die maximalen Werte für die k -te Schicht) an. Man erkennt das im Vergleich zur nicht-geschichteten Scheibe außerordentlich langsame Abklingen der Randspannungen in der geschichteten Scheibe.

5.1.2. Zweites Beispiel

Hier soll der Spannungszustand in der durch eine Schneidenlast P_0 am Rand beanspruchten homogen-geschichteten Halbscheibe untersucht werden. Für den Druck am unteren Rand der k -ten Schicht gilt (s. (58'))

$$p_k(x^*) = \frac{P_0}{\pi h} \cdot \int_0^\infty \psi^{-k} \cdot \cos \lambda^* x^* \cdot d\lambda^* \dots \dots \dots (68)$$

mit

$$\psi = \frac{\lambda^* + \sin \lambda^* \cdot \cos \lambda^* + \sqrt{\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \cdot \sin \lambda^*}{\lambda^* \cos \lambda^* + \sin \lambda^*},$$

wobei λ^* und x^* die dimensionslosen Größen $\lambda^* = \lambda h$ und $x^* = x/h$ bedeuten. Die tangential gerichtete Normalspannung am unteren Rand der k -ten Schicht beträgt

$$\sigma_{xk}(x^*, 0) = \frac{P_0}{\pi h} \cdot \int_0^\infty \frac{2 \lambda^* \psi \cdot \sin \lambda^* - (\sin^2 \lambda^* + \lambda^{*2})}{\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \cdot \psi^{-k} \cdot \cos \lambda^* x^* \cdot d\lambda^* \quad (69).$$

Diesen Ausdruck erhält man durch Rücktransformation von (23), wenn man dort $y = 0$ und $\bar{q} = \bar{q} = 0$ sowie $\bar{p} = \bar{p}_{k-1}$ und $\bar{p} = \bar{p}_k$ setzt:

$$\bar{\sigma}_{xk}(\lambda^*, 0) = \frac{1}{\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \cdot \{2 \lambda^* \cdot \sin \lambda^* \cdot \bar{p}_{k-1} - (\sin^2 \lambda^* + \lambda^{*2}) \cdot \bar{p}_k\} \quad (70).$$

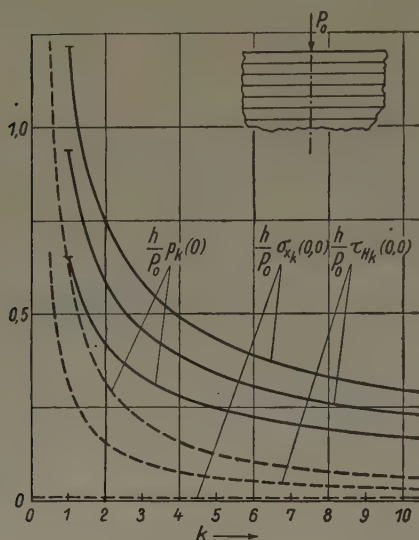


Bild 10. — Verlauf der Spannungen $p_k(0)$, $\sigma_{xk}(0,0)$ und $\tau_{Hk}(0,0)$ in der durch eine normal gerichtete Schneidenlast beanspruchten homogen-geschichteten Halbscheibe längs der Wirkungslinie der Kraft (gültig für $k=1, 2, 3, \dots$)
..... Verlauf der entsprechenden Spannungen in der nicht-geschichteten Halbscheibe

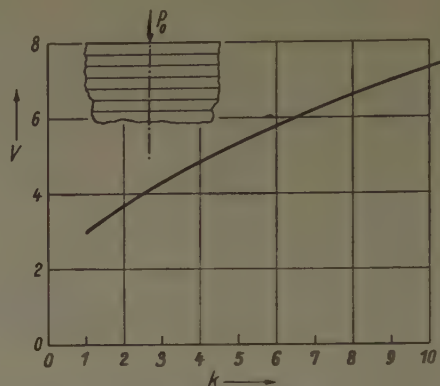


Bild 11. Verhältnis der Hauptschubspannung in der geschichteten Halbscheibe zur Hauptschubspannung in der nicht-geschichteten Halbscheibe längs der Wirkungslinie der normal gerichteten Schneidenlast (gültig für $k=1, 2, 3, \dots$)

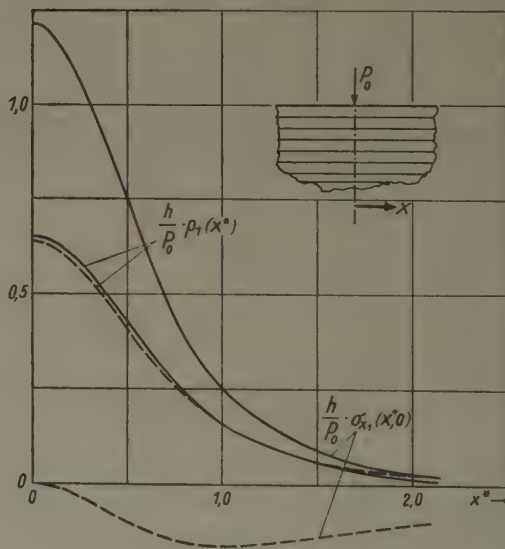


Bild 12. — Verlauf der Spannungen $p_1(x^*)$ und $\sigma_{x1}(x^*, 0)$ in der durch eine normal gerichtete Schneidenlast beanspruchten homogen-geschichteten Halbscheibe längs des unteren Randes der 1. Schicht
..... Verlauf der entsprechenden Spannungen in der nicht-geschichteten Halbscheibe

Die Integrale (68) und (69) lassen sich in geschlossener Form nicht streng lösen. Sie wurden für $x^* = 0$ (d. h. längs der Wirkungslinie der Kraft P_0) numerisch ausgewertet; das Ergebnis zeigen die ausgezogenen Kurven von Bild 10, wo auch die Hauptschubspannung $\tau_{Hk} = \frac{1}{2} (p_k + \sigma_{xk})$ eingetragen ist. Zum Vergleich sind die entsprechenden für die nicht-geschichtete Halbscheibe maßgebenden Kurven (gestrichelt) eingezeichnet, für welche

$$p(0) = -(\sigma_y)_{x=0} = -\frac{2}{\pi} P_0 \cdot \frac{1}{\eta}; \quad (\sigma_x)_{x=0} = 0, \quad (\eta = kh)$$

gilt. Man erkennt — wie beim ersten Beispiel — das im Vergleich zur nicht-geschichteten Scheibe ziemlich langsame Abklingen des Drucks infolge der Schichtung. Bild 11 zeigt das Verhältnis der Hauptschubspannung in der geschichteten Scheibe zur Hauptschubspannung in der nicht-geschichteten Scheibe (gültig jeweils für den unteren Rand der k -ten Schicht und längs der Wir-

kungslinie der Kraft P_0). Sieht man die Hauptschubspannung als Maß für die Anstrengung des Materials an, so folgt, daß die Schichten im Vergleich zu den entsprechenden Stellen in der nicht-geschichteten Scheibe um so stärker beansprucht werden, je tiefer sie liegen.

Ferner wurde für den unteren Rand der am stärksten beanspruchten ersten Schicht ($k = 1$) der Verlauf von $p_1(x^*)$ und $\sigma_{x1}(x^*, 0)$ aus (68) und (69) ermittelt und in Bild 12 niedergelegt, wo auch die Spannungen für die nicht-geschichtete Halbscheibe zu finden sind. Letztere errechnen sich aus

$$p(x^*) = -(\sigma_y)_{\eta=h} = \frac{2}{\pi} \frac{P_0}{h} \cdot \frac{1}{(x^{*2} + 1)^2}; \quad (\sigma_x)_{\eta=h} = -\frac{2}{\pi} \frac{P_0}{h} \cdot \frac{x^{*2}}{(x^{*2} + 1)^2}.$$

Man erkennt insbesondere die sehr hohe tangentielle Randspannung σ_{x1} .

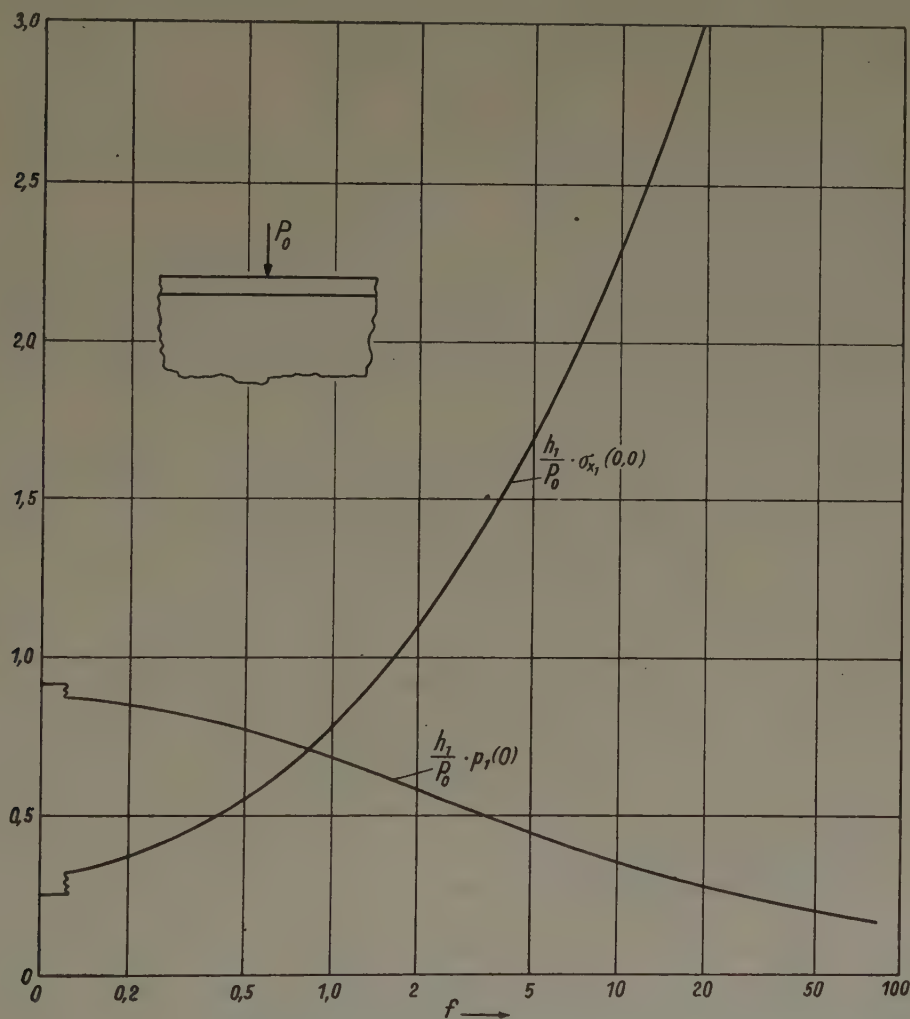


Bild 13. Spannungen $p_1(0)$ und $\sigma_{x1}(0, 0)$ in dem durch eine Schneidenlast normal belasteten, auf einer Halbscheibe reibungsfrei liegenden Streifen in Abhängigkeit vom Parameter f

5.2. Die Halbscheibe mit anschließendem Streifen

Dieser Fall unterscheidet sich von dem in Ziff. 4.2. behandelten dadurch, daß keine Schubspannung zwischen Halbscheibe und Streifen wirkt.

Mit $h_2 \rightarrow \infty$ bekommt man aus (39) für die Halbscheibe

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 = \frac{e^{2|\lambda|h_2}}{4} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty}; \quad \beta_2 = |\lambda| h_2 \cdot \frac{e^{|\lambda|h_2}}{2} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty}.$$

Damit wird aus (42)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{e^{2|\lambda|h_2}}{4 \varepsilon_1} \Big|_{h_2 \rightarrow \infty} \quad (\text{beim eb. Formänderungszustand}),$$

und die Differenzengleichung (53), angeschrieben für $k = 1$ und aufgelöst nach \bar{p}_1 , geht über in

$$\bar{p}_1(\lambda) = \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{\beta_1}{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \epsilon_1 + \alpha_1}.$$

Mit (39) folgt daraus

$$\bar{p}_1(\lambda) = \bar{p}_0(\lambda) \cdot \frac{|\lambda| h_1 \cdot \cos |\lambda| h_1 + \sin |\lambda| h_1}{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot (\sin^2 \lambda h_1 - (\lambda h_1)^2) + |\lambda| h_1 + \sin |\lambda| h_1 \cdot \cos |\lambda| h_1}.$$

Besteht die Belastung aus einer Schneidenlast P_0 bei $x = 0$, so gilt nach (30) $\bar{p}_0 = P_0/\sqrt{2\pi}$, und die Rücktransformation von \bar{p}_1 gemäß (6'*) liefert unter Voraussetzung eines ebenen Formänderungszustandes (beim ebenen Spannungszustand braucht man nur $\nu_1^2 = \nu_2^2 = 0$ zu setzen) folgende Druckverteilung zwischen Streifen und Halbscheibe:

$$p_1(x^*) = \frac{P_0}{\pi h_1} \int_0^\infty \frac{\lambda^* \cdot \cos \lambda^* + \sin \lambda^*}{f \cdot (\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}) + \lambda^* + \sin \lambda^* \cdot \cos \lambda^*} \cdot \cos \lambda^* x^* \cdot d\lambda^* \quad (71).$$

Dabei bedeuten $\lambda^* = \lambda h_1$, $x^* = x/h_1$ und $f = \frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2} \cdot \frac{E_1}{E_2}$.

(Eine gleichmäßig verteilte Zusatzbelastung des Streifens soll auch hier dafür sorgen, daß sich dieser nicht von der Halbscheibe abhebt). Setzt man in vorstehender Formel $f = 0$, was dem Fall eines elastischen Streifens auf starrer, glatter Unterlage entspricht, dann bekommt man Übereinstimmung mit dem von E. MELAN¹⁴⁾ schon früher erhaltenen Ergebnis.

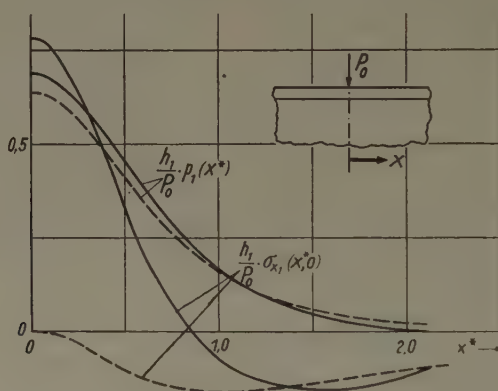


Bild 14. — Verlauf der Spannungen $p_1(x^*)$ und $\sigma_{x1}(x^*, 0)$ längs des unteren Randes des durch eine Schneidenlast normal belasteten, auf einer Halbscheibe reibungsfrei liegenden Streifens für $f=1$
 Verlauf der entsprechenden Spannungen in der Halbscheibe ohne Schnitt

Für die tangentielle Randspannung am unteren Rand des Streifens folgt nach (70) mit $k = 1$

$$\sigma_{x1}(x^*, 0) = \frac{P_0}{\pi h_1} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \times \left\{ 2\lambda^* \sin \lambda^* - \frac{(\sin^2 \lambda^* + \lambda^{*2})(\lambda^* \cos \lambda^* + \sin \lambda^*)}{f \cdot (\sin^2 \lambda^* - \lambda^{*2}) + \lambda^* + \sin \lambda^* \cdot \cos \lambda^*} \right\} \cdot \cos \lambda^* x^* \cdot d\lambda^* \quad (72).$$

Die numerische Auswertung der Gl. (71) und (72) zeigen die Bilder 13 und 14. In Bild 13 ist die Abhängigkeit des unter dem Streifen auftretenden Maximaldrucks $p_1(0)$ und der maximalen Spannung $\sigma_{x1}(0, 0)$ vom Parameter f dargestellt. Bild 14 gibt den für $f = 1$ (d. h. Streifen und Halbscheibe bestehen aus gleichem Material) errechneten Verlauf von $p_1(x^*)$ und $\sigma_{x1}(x^*, 0)$; zum Vergleich sind wiederum die entsprechenden Spannungen in der homogenen Halbscheibe eingetragen¹⁵⁾.

¹⁴⁾ E. MELAN, Beton und Eisen 18 (1919), S. 83.

¹⁵⁾ Siehe hierzu auch K. MARGUERRE, Ing. Arch. 4 (1933), S. 332.

6. Anhang

Zur Lösung des Gleichungssystems (40), (41) und des Gleichungssystems (53) bei beliebigen Schichten.

Das für den reibungslosen Fall zuständige Gleichungssystem (53) lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & a_{N-1, N-2} & a_{N-1, N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \\ \vdots \\ \bar{p}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix},$$

wobei

$$a_{k, k-1} = \beta_k \cdot \varphi_{k, k+1}; \quad a_{kk} = -(\alpha_{k+1} + \alpha_k \cdot \varphi_{k, k+1}); \quad a_{k, k+1} = \beta_{k+1}$$

und bei vorgegebenen Randlasten

$$a_1 = -\beta_1 \cdot \varphi_{1,2} \cdot \bar{p}_0; \quad a_{N-1} = -\beta_N \cdot \bar{p}_N$$

(in den freigelassenen Feldern stehen Nullen).

Es läßt sich durch fortgesetztes Eliminieren (GAUSSscher Algorithmus) auf folgende Form bringen

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & & & \\ & b_{22} & b_{23} & & & \\ & & b_{33} & b_{34} & & \\ & & & b_{44} & b_{45} & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & b_{N-1, N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \\ \vdots \\ \bar{p}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$b_{11} = a_{11}; \quad b_{kk} = a_{kk} - \frac{a_{k-1, k} \cdot a_{k, k-1}}{b_{k-1, k-1}}; \quad b_{k-1, k} = a_{k-1, k} \quad (k = 2, 3, \dots, N-1)$$

$$b_1 = a_1; \quad b_k = (-1)^{k+1} a_1 \cdot \frac{a_{21}}{b_{11}} \cdot \frac{a_{32}}{b_{22}} \dots \frac{a_{k, k-1}}{b_{k-1, k-1}} \quad (k = 2, 3, \dots, N-2)$$

$$b_{N-1} = (-1)^N \cdot a_1 \cdot \frac{a_{21}}{b_{11}} \cdot \frac{a_{32}}{b_{22}} \dots \frac{a_{N-1, N-2}}{b_{N-2, N-2}} + a_{N-1}.$$

Daraus erhält man der Reihe nach

$$\bar{p}_{N-1} = \frac{b_{N-1}}{b_{N-1, N-1}}; \quad \bar{p}_{N-k} = \frac{1}{b_{N-k, N-k}} (b_{N-k} - b_{N-k, N-k+1} \cdot \bar{p}_{N-k+1}) \quad (k = 2, 3, \dots, N-1).$$

Für das Gleichungssystem (40), (41), das für den Fall vollkommenen Haftens gilt, wird man keine geschlossene Lösung anstreben, da hierbei außerordentlich umfangreiche Ausdrücke entstehen. Vielmehr wird man das Gleichungssystem (40), (41), das von der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \\ & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ & & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} & a_{7,10} \\ & & & & & & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 \\ \bar{w}_5 \\ \bar{w}_6 \\ \bar{w}_7 \\ \vdots \\ \bar{w}_{2N-3} \\ \bar{w}_{2N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a_{2N-3} \\ a_{2N-2} \end{pmatrix}$$

ist, für eine Reihe von λ -Werten nach den je 2 ($N - 1$) Unbekannten $\bar{w}_k(\lambda)$ [$\bar{p}_k(\lambda) = \bar{w}_{2k-1}(\lambda)$; $\bar{q}_k(\lambda) = \bar{w}_{2k}(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots (N - 1)$)] mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus numerisch auflösen¹⁶⁾.

Abschließend sei bemerkt, daß das Problem der geschichteten Scheibe sich auch mittels Übertragungsmatrizen behandeln läßt, worauf an anderer Stelle noch eingegangen werden soll.

¹⁶⁾ R. ZURMÜHL, Prakt. Mathematik, 2. Aufl. Berlin 1957, Springer-Verlag, S. 91ff.

Manuskripteingang: 21. 7. 1960

Anschrift: Privatdozent Dr. H. BUFLER, Lehrst. f. Techn. Mech., Techn. Hochsch. München, München 2, Arcisstr. 21

KLEINE MITTEILUNGEN

Heat-Treatment of a Sphere made of Visco-Elastic-Plastic Material with Temperature-Dependent Yield Stress

We consider a sphere made of visco-elastic-plastic material being heated or cooled down from a known temperature $T = T(r)$. The temperature distribution at any subsequent moment is assumed to be known. The problem is to find σ_r , σ_θ and σ_φ as functions of r and t . We shall neglect the effect of stresses on temperature distribution and the inertia forces.

For the visco-elastic flow only, we write the stress-strain relations as

$$\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{2\eta} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1+\nu}{E} (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) \quad (1),$$

$$\frac{\epsilon_r + 2\epsilon_\theta}{3} = K \frac{\sigma_r + 2\sigma_\theta}{3} + \epsilon \quad \dots (2).$$

The equation of equilibrium is

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) \quad \dots (3)$$

and the condition of compatibility

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon_\theta) \quad \dots (4).$$

We have assumed in the above that the temperature distribution is a function of r only so that $\epsilon_\theta = \epsilon_\varphi$, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ and $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\theta\varphi} = 0$. For the portion of the sphere wherein the plastic flow is not zero, equations (2), (3) and (4) hold good, while instead of (1) we have

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = Y^2(T) \quad \dots (5),$$

so that in this region

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm Y \quad \dots (6)$$

and

$$\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta = \pm \dot{Y} \quad \dots (7).$$

At any given moment, a given point of the sphere is either in a plastic stage ($\epsilon_{ij}^p \neq 0$) or in a visco-elastic stage. If it is in a visco-elastic stage, it stays in this stage so long as $|\sigma| < Y$. We want to decide under what conditions does a change of phase, from visco-elastic to visco-elastic-plastic or vice-versa, take place.

So long as a point is in visco-elastic stage, equations (1), (2), (3) and (4) apply and we can calculate σ and $\dot{\sigma}$ from these equations. If, at the moment these equations give $\sigma = Y$, they also give $\dot{\sigma} > \dot{Y}$, the point will undergo a change of phase from visco-elastic to visco-elastic-plastic and from that moment onwards, till

the point stays in this latter stage, equations (2), (3), (4), (6) and (7) will apply.

Similarly, if at the moment equations (1), (2), (3) and (4) give $\sigma = -Y$, they also give $\dot{\sigma} < -\dot{Y}$, the point will undergo a change of phase from visco-elastic to visco-elastic-plastic and from that moment onwards, till the point stays in this latter stage, equations (2), (3), (4), (6) and (7) will apply.

The conditions under which a change of phase will take place from visco-elastic-plastic to visco-elastic are as follows:

Suppose the plastic flow started at a given point at a moment $t = t_1$. Also let us suppose that at this moment $t = t_1$, at the point under consideration σ is equal to Y , as given by equations (1), (2), (3) and (4). Then these equations also give at this point, at the moment $t = t_1$

$$\dot{\sigma} > \dot{Y} \quad \dots (8).$$

Plastic flow continues at this point for moments $t > t_1$, only so long as the value of $\dot{\sigma}$ given by (1), (2), (3) and (4) satisfies inequality (8). This means that the plastic flow takes place, only so long as $\epsilon_{ij}^p = 0$ will give $\dot{\sigma} > \dot{Y}$ (at the points where $\sigma = Y$). As soon $\epsilon_{ij}^p = 0$ will give $\dot{\sigma} \leq \dot{Y}$, the plastic flow will cease.

Similarly, if plastic flow starts at a point at the moment $t = t_2$ and at this moment, at the point under consideration, equations (1), (2), (3) and (4) give $\dot{\sigma} = -\dot{Y}$ then they also give at this point at $t = t_2$

$$\dot{\sigma} < -\dot{Y} \quad \dots (9).$$

As before, plastic flow will continue at the point under consideration for moments $t > t_2$, only so long as the value of $\dot{\sigma}$ as given by equations (1), (2), (3) and (4) for moments $t > t_2$ satisfies inequality (9).

We shall see presently that these conditions satisfy the requirement that during plastic flow, the plastic work $S_{ij} \epsilon_{ij}^p > 0$.

We notice that equations (2), (3) and (4) are valid at all moments at all points of the sphere.

Substituting from equations (3) and (4) in equation (2) and integrating, and observing that ϵ_θ is finite at $r = 0$, we get

$$\epsilon_\theta = K \sigma_r + \frac{1}{r^3} \int_0^r 3 r^2 \epsilon dr \quad \dots (10).$$

Substituting from (10) in (1) we get

$$\frac{1}{\beta} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = 2r \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left(\frac{1}{r^3} \int_0^r 3 r^2 \epsilon dr \right) \quad (11).$$

Equation (11) gives for those points where $|\sigma| < Y$

$$\sigma = \exp\left(-\int \frac{\beta}{\eta} dt\right) \int_0^t \beta f(r, t) \exp\left(\int \frac{\beta}{\eta} dt\right) dt \quad (12),$$

where

$$f(r, t) = 2r \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left(\frac{1}{r^3} \int_0^r 3r^2 \varepsilon dr \right) \quad (13).$$

At those points where $\sigma = \pm Y$, equation (11) gives

$$\dot{\sigma} = \beta f(r, t) \pm \frac{\beta}{\eta} Y \quad (14).$$

We may now verify the condition of positive plastic work in the plastic regime. From (10)

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = -2K(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{3}{r^3} \int_0^r 3r^2 \varepsilon dr + 3\varepsilon$$

giving, at those points where $\dot{\varepsilon}_{ij} \neq 0$

$$\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{3}{r^3} \int_0^r 3r^2 \dot{\varepsilon} dr + 3\dot{\varepsilon} \mp \frac{Y}{2\eta} \mp \frac{3(1-\nu)}{E} \dot{Y}$$

according as $\sigma = \pm Y$.

The condition of positive plastic work is

$$\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta \geq 0$$

according as $\sigma = \pm Y$.

This condition reduces to

$$-\frac{3}{r^3} \int_0^r 3r^2 \dot{\varepsilon} dr + 3\dot{\varepsilon} \mp \frac{Y}{2\eta} \geq \pm \frac{3(1-\nu)}{E} \dot{Y}$$

which is equivalent to the condition that $\dot{\sigma}$, as given by (14), should be greater than \dot{Y} or less than $-\dot{Y}$ respectively. Hence, etc.

Suppose we consider a sphere being cooled down from any temperature and we want the stresses in the sphere as a function of r and t . Let us suppose that at $t = 0$, $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = 0$.

Let us fix our attention at any point r . In the beginning equation (12) will give the value of σ at this point. Suppose that at $t = t_1$ equation (12) gives, at this point $\sigma = Y$.

If at $t = t_1$, equation (14) gives, at this same point $\dot{\sigma} \leq \dot{Y}$, equation (12) will still apply for moments $t > t_1$.

If, however, at $t = t_1$, (14) gives $\dot{\sigma} > \dot{Y}$ at the point under consideration, then for $t_3 > t > t_1$, we shall have, $\sigma = Y$, $\dot{\sigma} = \dot{Y}$ where t_3 is the largest value of t , such that for $t_3 > t > t_1$ (14) gives $\dot{\sigma} > \dot{Y}$.

At $t = t_3$, $\sigma = Y$ and for moments $t > t_3$, $\dot{\sigma}$ must be calculated from (12) and we get

$$\sigma = \exp\left(-\int \frac{\beta}{\eta} dt\right) \int_{t_3}^t \beta f(r, t) \exp\left(\int \frac{\beta}{\eta} dt\right) dt + Y \quad (15).$$

Equation (15) will give the value of σ at the point under consideration, so long as this value satisfies $|\sigma| \leq Y$ and so on.

If we know $\sigma\left(-\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r)\right)$, a simple integration will give σ_r and then equation (3) will give σ_θ .

Nomenclature

$r, \theta, \varphi \equiv$ spherical co-ordinates with origin at the center of the sphere

$t \equiv$ time

$T \equiv$ Temperature

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\theta\varphi} \equiv$ strain components

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\theta\varphi} \equiv$ stress components

$E, \nu, \eta \equiv$ known functions of r and t

$K \equiv (1 - 2\nu)/E$. K is assumed to be constant

$Y \equiv$ the yield value of $|\sigma_r - \sigma_\theta|$. Y is a known function of T

$\sigma \equiv \sigma_r - \sigma_\theta$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p \equiv$ plastic components of deviatoric strain rate

$S_{ij} \equiv$ deviatoric components of stress

$\varepsilon \equiv \int \alpha dt$

$\alpha \equiv$ co-efficient of linear thermal expansion

dot \equiv denotes differentiation with respect to time

$\beta \equiv E/[6(1 - \nu)]$

Reference

H. G. LANDAU, J. H. WEINER and E. E. ZWICKY JR., Thermal Stresses in a Visco-elastic-plastic Plate with Temperature Dependent Yield Stress. J. Appl. Mech., Ser. E, Vol. 27, No. 2 (1960).

Verfasser: B. D. AGGARWALA, Rensselaer Polytechnic Institute, Dept. of Mechanics, Troy (New York), USA

BUCHBESPRECHUNGEN

F. Winckel, Technik der Magnetspeicher. XVI + 614 S. m. 325 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 72,— DM.

Als Gemeinschaftsarbeit führender Fachleute auf den verschiedenen Teilgebieten der magnetischen Speichertechnik bietet das vorliegende Werk in seiner Gliederung Theorie—Konstruktion—Messung—Normung sowohl dem neu an dieses Fachgebiet herantretenden Wissenschaftler und Techniker eine gute Einführung als auch dem Fachmann auf dem jeweiligen Fachgebiet wertvolle Anregung.

Hier seien nur die Beiträge herausgegriffen, die für die Technik der Rechenanlagen von Bedeutung sind.

H. BILLING (München) betrachtet die Magnetspeicher bei elektronischen Rechenmaschinen. Bei der prinzipiellen Darstellung des Magnetstromspeichers werden die verschiedenen Schreib-

verfahren, Kopfformen und Auswahlrichtungen behandelt, der Magnetplattenspeicher wird erwähnt. Umlaufspeicher werden in Form von dynamischen Trommelspeichern beschrieben. Ebenso stehen Nickelverzögerungslinien, Magnetband- und Magnetkernmatrixspeicher an.

Der Digitale Speicher als Baustein in Datenverarbeitungsanlagen stellt besondere Anforderungen an die Organisation der Speichereinrichtung. R. PILOTY (Stuttgart) zeigt die verschiedenen Identifizierungsverfahren hinsichtlich der Ausnutzung des Speicherraumes und der Aufrufzeit.

Meßverfahren an Speichern für kontinuierliche und diskrete Informationen werden von W. KALLENBACH (Braunschweig) unter Meßtechnik des Magnetspeichers besprochen. Auf Gleichlaufmessung, Spaltjustage und Frequenzgangmessung wird eingegangen.

F. KRONES (Leverkusen) behandelt in seinem Beitrag Theorie des Magnetspeichers knapp aber verständlich statische Speicher. Drei große Abschnitte befassen sich mit dynamischen Speichern und behandeln den Wiedergabevorgang, die magnetischen Eigenschaften der Magnetschicht und den Aufsprehvorgang.

Die Zahl der selbständigen Kapitel und ihrer Autoren läßt die wissenschaftlich-technische Breite und Bedeutung dieses Speicherverfahrens erkennen. Es ist dem Herausgeber in hervorragendem Maße gelungen, durch die Heranziehung der verschiedenen Autoren und der damit verbundenen unterschiedlichen Blickpunkte eine fruchtbare Vereinigung der aus Theorie und Praxis erwachsenden Problemstellungen zu erreichen. Es ist dem Buch, das einem bestehenden Bedürfnis nachkommt, zu wünschen, daß es auch als Lehrbuch an Hochschulen Eingang findet.

Jena

W. KÄMMERER

H. L. Dryden, Th. von Kármán, and G. Kuerti, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. VI. X + 294 S. m. 63 Abb. New York and London 1960. Academic Press. Preis geb., \$ 9,00.

Der Band wird von zwei großen Arbeiten beherrscht. In der ersten bringen G. LUDWIG und M. HEIL (Boundary-Layer Theory with Dissociation and Ionization) eine umfassende Darstellung über die bei Höchstgeschwindigkeiten notwendige Weiterentwicklung der klassischen Grenzschicht-Theorie. Die zwei Teile der Arbeit sind fast unabhängig voneinander lesbar. Der erste beschäftigt sich mit der kinetischen Theorie dissoziierter 2-atomiger Moleküle (Gase A_2); unter Berücksichtigung der Transportgleichung für molekulare Eigenschaften von Teilchen A_μ ergibt sich der Wirkungsquerschnitt beim Zusammenstoß eines Gases A_2 mit Atomen; dieser Teil dürfte wohl nur dem theoretischen Physiker verständlich sein. Der 2. Teil vermittelt jedoch dem Aerodynamiker wichtige Erkenntnisse; hier werden die laminaren Grenzschichtgleichungen bei einem dissoziierenden Gase A_2 aufgestellt und deren Lösungen im Fall der ebenen Platte und der Staupunktströmung angegeben.

Die zweite umfassende Arbeit stammt von K. L. OSWATITSCH (Similarity and Equivalence in Compressible Flow), die auch für den Berechnungsingenieur von größtem Interesse ist. Verf. geht davon aus, daß die linearisierten gasdynamischen Gleichungen sowohl bei Unter- wie auch bei Überschall in einfachem Zusammenhang mit denen der inkompressiblen Strömung stehen; hierbei ist bei der Transformation der Geschwindigkeitskomponenten ein konstanter Faktor A frei wählbar; systematisch werden Ähnlichkeitsregeln aufgestellt, wobei affine Beziehungen zwischen Körper und Modell bestehen. Die Ergebnisse werden darauf ausgedehnt, daß auch quadratische Störungsglieder berücksichtigt werden. Bei den Äquivalenzsätzen werden Körper geringer Flügelstreckung mit konischen Rotationskörpern verglichen. Die Arbeit, in der Näherungslösungen mit exakten Lösungen und Meßergebnissen verglichen werden, schließt mit der bekannten Flächenregel.

Die wertvollen Beiträge von K. STEWARTSON (The Theory of Unsteady Laminar Boundary Layers) und W. CHESTER (The Propagation of Shock Waves along Ducts of Varying Cross Section) zeigen, daß auf diesen Gebieten der Forschung noch ein weites Feld offen steht. Der Band schließt mit grundsätzlichen Bemerkungen von R. WILLE (Kármán Vortex Streets) über Wirbelstraßen-Probleme, wobei vor allem die bekannten Arbeiten aus dem Föttinger-Institut herangezogen werden.

Eichwalde b. Berlin

W. BADER

K. P. Stanyukovich, *Unsteady motion of Continuous Media*. XV + 745 S. London/Oxford/Paris/New York 1960. Pergamon Press. Preis £ 5 net.

Das Werk behandelt eine Fülle von Problemen aus dem Gebiet der instationären Strömungen in gasförmigen Medien und der Ausbreitungsvorgänge von Störungen in Wasser und festen Körpern. Mathematisch gesehen handelt es sich um Anfangs- und Randwertprobleme bei einem System von 2 oder 3 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung; trotzdem sind die verwendeten mathematischen Hilfsmittel verhältnismäßig einfach, aber die straffe, souverän geschriebene Darbietung des umfangreichen Stoffes verlangt von dem Leser ein beträchtliches Maß von Mitarbeit. Das Werk stützt sich naturgemäß auf die diesbezügl. sowjetischen Forschungen (hier sind außer K. P. STANYUKOVICH insbesondere L. D. LANDAU, L. I. SEDOV und I. B. SELDOVICH zu nennen); es würdigt jedoch auch die bekannten Arbeiten von R. COURANT und K. FRIEDRICHS, K. BECHERT, E. JOUGUET u. a. In dem Werk wird lediglich die analytische Lösung der Probleme behandelt, wobei zwar die EULERSche Darstellung überwiegt, jedoch auch von der LAGRANGESchen Darstellung in großem Ausmaß Gebrauch gemacht wird. Vorzugsweise wird von der allgemeinen Lösung — z. T. unter der Annahme recht allgemeiner Zustandsgleichungen — ausgegangen. Das vom Aerodynamiker bevorzugte Charakteristiken-Verfahren wird nicht verwendet. Die umfangreiche Monographie befaßt sich zunächst (200 Seiten) mit Problemen der eindimensionalen isentropen Gasströmung, wobei die Form $k = (2r + 3)/(2r + 1)$ für den Adiabaten-Exponenten angenommen ist. 300 Seiten etwa umfaßt die Darstellung der Theorie der stationären und instationären Verdichtungsstöße; auch die Ausbreitung von Detonationen wird berücksichtigt. Es folgt die Behandlung der dreidimensionalen Gasströmung und der instationären Bewegung in Wasser und festen Körpern; hierbei wird auch ein allgemeineres Fließgesetz den Rechnungen zu Grunde gelegt, so daß in diesem Fall die sonst unmöglichen Verdünnungsstöße auftreten können. Anschließend werden (250 Seiten) Einzelfragen (Probleme der inneren Ballistik, Gasströmungen im Schwerfeld und bei verdünnten und sehr dichten Gasen sowie einige Fragen der relativistischen Mechanik) behandelt, wobei auch Fragen der Kosmogonie gestreift werden. — Dem Verlag gebührt größter Dank für die Herausgabe der Übersetzung.

Eichwalde b. Berlin

W. BADER

Information Processing. Proceedings of the International Conference on Information Processing, Paris 15—20 June 1959. 520 S. München 1960. Oldenbourg Verlag GmbH. Preis geb. 84,— DM.

Es ist außerordentlich zu begrüßen, daß die zahlreichen Vorträge, die auf der ersten Internationalen Tagung über Informationsverarbeitung (ICIP) gehalten worden sind, mit den zugehörigen Diskussionsbeiträgen und die in den einzelnen Symposien gelieferten Beiträge so schnell und in so vollständiger Form im Druck erschienen sind. Die UNESCO, auf deren Veranlassung und in deren Gebäude dieser weltweite Kongreß unter der Leitung von Prof. H. H. AIKEN abgehalten worden ist, und die Verlage R. Oldenbourg (München) und Butterworths Scientific Publications (London) haben sich damit ein großes Verdienst erworben. Die Vorträge sind in mehrere Kapitel aufgeteilt, die den einzelnen Sektionen des Kongresses entsprechen und in ihrer englischen Bezeichnung hier aufgeführt seien:

I. Methods of Digital Computing; II. Common Symbolic Language for Computers; III. Automatic Translation of Languages; IV. Pattern Recognition and Machine Learning; V. Logical Design of Computers; VI. Special Session on Computer Techniques of the Future; VII. Miscellaneous Topics.

Schon diese Aufzählung zeigt, — was durch die Themen der einzelnen Vorträge noch bestätigt wird —, daß sich der Kongreß eine sehr umfassende Aufgabe gestellt hatte und die damit zusammenhängenden

Probleme in ihrer ganzen Breite und Vielfalt erörtert worden sind. Auf Einzelheiten einzugehen verbietet die große Zahl der Vorträge. Es sei aber darauf hingewiesen, daß der vorgelegte Band durch ein ausführliches Stichwortverzeichnis (in englischer und französischer Sprache) und durch ein Verzeichnis der Verfasser zitierter Arbeiten zu einem willkommenen Nachschlagewerk wird, das in der Lage ist, jeden Interessenten über den Stand der Forschung auf seinem Gebiet zuverlässig zu informieren. Auch das Teilnehmerverzeichnis des Kongresses ist eine begrüßenswerte Bereicherung des in jeder Hinsicht vorzüglich ausgestatteten Bandes.

Dresden

H. HEINRICH

E. Schmidt, Einführung in die Technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik. 8. Auflage. XX + 543 S. m. 244 Abb., 69 Tabellen, 3 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 33,— DM.

Das in Fachkreisen weit über die Grenzen Deutschlands hinaus bekannte SCHMIDTSche Lehrbuch zur Thermodynamik liegt bereits wieder in einer neuen, der nunmehr 8. Auflage vor, nachdem erst vor etwa 2 Jahren, im Frühjahr 1958, die 7. Auflage erschienen war. Diese rasche Auflagenfolge (die 6. Auflage kam 1956 heraus) ist nicht zuletzt ein Zeichen dafür, welcher großen Beliebtheit und Wertschätzung sich das SCHMIDTSche Lehrbuch in der Fachwelt, an den Hochschulen wie in der Praxis, nach wie vor erfreut. Der Unterzeichnete kann es sich daher ersparen, in dieser Besprechung auf die Qualitäten und Vorzüge dieses bekannten Standardwerkes, wie z. B. die konsequente Verwendung von Größengleichungen, die zahlreich beigefügten Tabellen, die in den Text eingestreuten und geschickt ausgewählten Übungsbeispiele usw., erneut ausführlich hinzuweisen. Das ist in den Besprechungen zu den früheren Auflagen bereits zur Genüge geschehen. Auch bezüglich der Aufmachung erübrigt sich jedes Wort. Sie liegt in bekannter Qualität vor. Vom Inhaltlichen her unterscheidet sich die 8. Auflage von der vorhergehenden im wesentlichen durch die Hinzunahme eines Kapitels über den Zustand der Materie bei höchsten Temperaturen, den sogenannten Plasmazustand, sowie durch die Erweiterung der im Anhang beigefügten Wasserdampf-Tabellen auf den maximalen Parameterbereich von 500 at und 800° C. Sie sind ein Auszug aus der vom gleichen Verfasser bearbeiteten und ebenfalls im Jahre 1960 erschienenen 5. Auflage der VDI Wasserdampf-Tabell.

Dresden

N. ELSNER

H. Schubert / R. Haussner / J. Erlebach, Vierstellige Tafeln und Gegendafeln. (Sammlung Götschen, Band 81.) 157 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 3,60 DM.

Gegenüber der letzten Auflage von 1945 sind einige Veränderungen vorgenommen worden: Fortgelassen wurden alle „Gegendafeln“ (Antilogarithmen usw.), neu aufgenommen wurden Tafeln für Quadrat- und Kubikzahlen. So enthält das Bändchen jetzt folgende vierstelligen Tafeln: Dekadische Logarithmen der Zahlen 1 bis 10000 sowie der trigonometrischen Funktionen (Argumentschritt 1' bzw. 10''), Additions- und Subtraktionslogarithmen, natürliche Logarithmen der Zahlen 1 bis 100, Quadrate und Kuben der Zahlen 1,00 bis 9,99, natürliche Werte der trigonometrischen Funktionen (Argumentschritt 10'). Es folgen einige kleinere mathematische Tafeln (u. a. Umrechnung von Winkelmaßen, Zinsrechnung) und Tafeln mit geographischen, astronomischen und physikalischen Angaben. Hervorzuheben ist die übersichtliche Anordnung, die durch schwarzgedruckte Numeri und rotgedruckte Logarithmen noch unterstützt wird.

Dresden

A. SCHUBERT

O. Perron, Irrationalzahlen. 4. Aufl. VIII + 202 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 28,— DM.

Das bekannte Buch des Verfassers hat seit seinem ersten Erscheinen im Jahr 1921 nichts an Frische und Lebendigkeit eingebüßt. Daher ist auch die vierte Auflage gegenüber den früheren, besonders der zweiten Auflage, nur mit kleinen Änderungen und Ergänzungen versehen worden. Die Literaturhinweise wurden durch einige neuere Arbeiten ergänzt.

Freiberg/Sa.

F. RÜHS

J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis. (Pure and Applied Mathematics, Vol. X) XIV + 361 S. New York 1960. Academic Press Inc. Preis geb. \$ 8,50.

Das vorliegende Buch des berühmten französischen Mathematikers ist eine hervorragende Einführung in die heutige Analysis und Funktionalanalysis. Das in modernster Terminologie abgefaßte Werk setzt zwar keine besonderen Vorkenntnisse voraus, jedoch eine gewisse Fähigkeit zum abstrakten Denken. Eine große Anzahl von außerordentlich gut ausgewählten „Problemen“, die hinter den meisten Paragraphen eingefügt sind, ergänzt den im Text dargebotenen Stoff und bietet einen Ausblick auf weitere wichtige und interessante Fragestellungen. Kap. I und Kap. II enthalten die wichtigsten Begriffe aus der Mengenlehre und aus der Theorie der reellen Zahlen. Kap. III, das sich eingehend mit den Eigenschaften der metrischen Räume beschäftigt, ist zugleich eine vorzügliche Einführung in ein Studium der analytischen Topologie, wie sie z. B. in den bekannten Büchern von KELLEY und BOURBAKI dargestellt ist. Das nächste Kapitel, das sich nochmals mit dem Körper der reellen Zahlen befaßt, der aber nun im Anschluß an das vorhergehende Kapitel als metrischer Raum betrachtet wird, schließt mit dem wichtigen TIETZE-URYSOHNschen Erweiterungssatz. Kapitel V, das auf normierte Räume und speziell auf BANACH-Räume eingeht (Reihen in normierten Räumen, Teilräume und endliche Produkte von normierten Räumen, äquivalente Normen, Räume von stetigen multilinearen Abbildungen, abgeschlossene Hyperebenen und stetige Linearformen, Satz von F. RIESZ: Ein lokal kompakter normierter Raum ist stets von endlicher Dimension), wird jedem Leser, der sich besonders mit der allgemeinen Theorie der BANACH-Räume und der topologischen Vektorräume beschäftigen will, als Einführung von großem Nutzen sein. Auf einen Abschnitt über HILBERT-Räume folgen wichtige Ausführungen über Räume stetiger Funktionen (Approximationssatz von STONE-WEIERSTRASS, gleichstetige Mengen und der Satz von ASCOLI, Regelfunktionen). 50 Seiten sind dann dem natürlich völlig modern dargestellten Differential-Kalkül gewidmet (der fundamentale Begriff der Differenzierbarkeit einer Abbildung aus einem BANACH-Raum in einen anderen stützt sich auf die Approximation dieser Abbildung durch lineare Abbildungen), weitere 70 Seiten legen ungemein elegant die Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen dar. Dem Kap. X über Existenzsätze (Methode der sukzessiven Approximation, implizite Funktionen, Differentialgleichungen, Abhängigkeit der Lösung von einem Parameter usw.) schließt sich als Höhepunkt des Buches das letzte Kapitel über die Grundlagen der Spektraltheorie an (Spektrum eines stetigen Operators, kompakte Operatoren, Theorie von F. RIESZ usw.). Wie die Theorie auf bekannte Problemstellungen der klassischen Analysis angewandt werden kann, wird besonders eingehend und instruktiv in den letzten beiden Paragraphen durch die Behandlung der FREDHOLMSchen Integralgleichung und des STURM-LIOUVILLESchen Problems gezeigt. Ein geschickt ausgesuchtes Literaturverzeichnis beschließt das inhaltsreiche und äußerst empfehlenswerte Buch.

Dresden

M. LANDSBERG

B. Spain (Head of the Mathematics Department, Sir John Cass College), *Analytical Quadrics*. IX + 135 S. m. 23 Abb. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press. Preis geb. 30 s. net.

Vorliegendes Werk ist vom Autor als eine kurzgefaßte Einführung in die analytische Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes gedacht. Es wird dabei durchweg ein räumliches kartesisches Normalkoordinatensystem verwendet und auf die Hilfsmittel der Vektorrechnung verzichtet. Vom Leser werden nur die einfachsten Kenntnisse der analytischen Geometrie der Ebene, wie sie etwa in der Oberschule geboten werden, vorausgesetzt. Das 1. Kapitel bringt als Einführung die kartesischen räumlichen Normalkoordinaten von Punkten, Abstands- und Teilungsformel, Richtungskosinus einer Geraden, Winkel zweier Geraden und die Projektion eines räumlichen Streckenzuges auf eine Gerade. Das zweite Kapitel ist der Ebene und der Geraden sowie den Grundaufgaben über Ebenen und Geraden gewidmet. Die nächsten drei Kapitel behandeln Kugeln, Kegel 2. Ordnung und Zylinder 2. Ordnung, Mittelpunktsflächen 2. Ordnung und das Paraboloid in einfachster Lage zum Koordinatensystem. Im 6. Kapitel werden die Fernelemente durch Einfüh-

rung homogener Koordinaten erfaßt, der absolute Kugelkreis in die Betrachtungen einbezogen und die Kreisschnitte der Flächen 2. Ordnung aufgezeigt. Kapitel 8 bespricht die Eigenschaften einer allgemeinen Quadrik. Im 9. Kapitel werden die Invarianten einer quadratischen Form bei Schiebungen und Drehungen untersucht und seine Klassifikation mit Reduktion von Quadriken durchgeführt (Hauptachsen-transformation). Im 11. Kapitel werden Fokaleigenschaften von Quadriken untersucht und konfokale Quadriken betrachtet. Sodann bringt Kapitel 12 lineare Systeme von Quadriken und deren Eigenschaften. Im letzten (13.) Kapitel werden Ebenenkoordinaten eingeführt und das Dualitätsgesetz im Raum studiert. Ein Anhang ist der Matrizenrechnung gewidmet.

Eine große Anzahl von Beispielen, deren Lösungen im 2. Anhang erscheinen, erleichtert dem Studierenden die Erarbeitung des gebotenen Lehrstoffes. Für die Studenten der Technischen Hochschulen der ersten Semester ist daher diese auch didaktisch hervorragende Einführung in die analytische Geometrie des Raumes sehr zu empfehlen.

Dresden

R. BEREIS

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

I. Szabó, *Höhere technische Mechanik*. 3. verbesserte und erweiterte Aufl. XII + 504 S. m. 421 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 31,50 DM.

W. Traupel, *Thermische Turbomaschinen*. 2. Band: Regelungsfragen, Festigkeit und dynamische Probleme. VIII + 420 S. m. 459 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 61,50 DM.

K. Klotter, *Technische Schwingungslehre*. Zweiter Band: Schwinger von mehreren Freiheitsgraden (Mehrläufige Schwinger). 2. umgearbeitete und ergänzte Aufl. XVI + 483 S. m. 296 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer Verlag. Preis geb. DM 58,50 DM.

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*. Vol. 1 of: Course of Theoretical Physics. 165 S. m. 55 Abb. Oxford/London/Paris 1960. Pergamon Press Ltd. Preis geb. 40 s net.

W. Franz, *Topologie*. Band I: Allgemeine Topologie. (Sammlung Götschen, Band 1181.) 144 S. m. 9 Abb. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 3,60 DM.

W. Macke, *Elektromagnetische Felder*. Ein Lehrbuch der Theoretischen Physik. XVI + 395 S. m. 166 Abb. Leipzig 1960. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig. Preis geb. 29,50 DM.

A. Berrot und W. Hofmann, *Kosmische Geodäsie*. XIV + 356 S. m. 130 Abb. Karlsruhe 1960. Verlag G. Braun. Preis geb. 70,— DM.

E. Durand, *Solutions Numériques des Équations Algébriques*. Tome I. Équations du Type $F(x) = 0$, Racines d'un polynôme. 328 S. m. 103 Abb. Paris 1960. Masson et Cie. Preis geb. 65 NF.

A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*. (Vol. 9 of Pure and Applied Mathematics.) IX + 202 S. New York and London 1960. Academic Press. Preis geb. \$ 6.80.

A. A. Abramov, *Tables of $\ln \Gamma(z)$ for Complex Argument*. 331 S. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 s 5.

Jahrbuch 1959 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) mit den Vorträgen der WGL-Tagung in Hamburg vom 13.—16. Oktober 1959. Herausg. H. Blenk. 442 S. Braunschweig 1960. Friedr. Vieweg & Sohn.

NACHRICHT

Am 16. Februar beging Nikolaj Ivanovič MUSCHELIŠVILI seinen 70. Geburtstag. Durch seine vielfach grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet der mathematischen Elastizitätstheorie und der Theorie der singulären Integralgleichungen erfreut sich der Jubilar in der ganzen Welt eines hohen Ansehens. Er ist Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und Präsident der Akademie der Wissenschaften der Grusinischen Sowjetrepublik seit ihrer Gründung im Jahre 1941.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4; Fernsprecher: 22 04 41. Telex-Nr. 011 773. Postscheckkonto: Berlin 350 21. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/41/4. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer ZLN 5011 des Ministeriums für Kultur. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

Diesem Heft liegt ein Prospekt vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin bei.

WILHELM KLEIN

Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen

1961. XII, 259 Seiten — 120 Abbildungen — 2 Tabellen — 1 Übersichtstafel — 11 Abbildungen
auf 3 Kunstdrucktafeln — gr. 8° — Lederin DM 39,—

Das Buch behandelt nach einer geschichtlichen Einleitung der Strom-Spannungs-Matrizen des Mehrtores (also die Leitwertmatrix, Widerstandsmatrix, Reihenparallelmatrix, Parallelreihenmatrix und Kettenmatrix) seine Wellenmatrizen (scattering-matrix und Übertragungsmatrix), die eine Verallgemeinerung der klassischen Wellentheorie des Vierpols darstellen.

Die sehr einfache Strukturregel der Leitwertmatrix führt zu einem systematischen Berechnungsverfahren für die Vierpoleigenschaften beliebig komplizierter Schaltungen, das auch die Anwendung programmgesteuerter Rechenautomaten gestattet. Die weiterhin behandelte Transformationstheorie der Strom-Spannungs-Matrizen wird auf die Umwandlung der Drehstromsysteme sowie auf die Fragen der Leitungsbildung in der Nebensprechtheorie angewendet. Als Anwendungsbeispiel der Vierpol-Wellenparametertheorie enthält das Buch schließlich die Theorie der Abzweigfilter und Brückenfilter, also der Grundfilter, der Zobelfilter und der Jaumannfilter.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

HERBERT BENZ

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

(Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften
zu Berlin, Heft 9)

1961. 149 Seiten — 5 Abbildungen — gr. 8° — DM 29,50

Für die Theorie der algebraischen Zahlen gibt es zwei wesentlich verschiedene Begründungsweisen, die idealtheoretische, die auf Dedekind zurückgeht, und die divisorentheoretische, die auf Grund der p -adischen Methode von Hensel entwickelt und dann durch die Bewertungstheorie von Ostrowski u. a. unterbaut wurde.

In dieser Arbeit wird eine konsequente divisorentheoretische Begründung der Arithmetik (der Maximalordnungen und auch anderer Ordnungen) einer algebraischen Algebra A gegeben und durch eine Bewertungstheorie unterbaut.

Das Buch ist so geschrieben, daß es auch von Nichtkennern der gewöhnlichen Bewertungstheorie gelesen werden kann.

I. P. NATANSON

Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen

Zweite ergänzte Auflage unter wissenschaftlicher Bearbeitung von K. Bögel

Übersetzung aus dem Russischen

(Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abt., Band VI)

1960. XII, 590 Seiten — 9 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 39,—

L. A. LJUSTERNIK / W. I. SOBOLOW

Elemente der Funktionalanalysis

Zweite, unveränderte Auflage

Übersetzung aus dem Russischen

(Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abt., Band VIII)

1960. XII, 256 Seiten — 4 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 25,—

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N